EULER, DE BRUIJN Y LAS VÍBORAS OUROBORO EN LOS AUTOMATAS CELULARES UNIDIMENSIONALES

JOSÉ MANUEL GÓMEZ SOTO

UNIVERSIDAD LA SALLE

CONACICO-2009

UAZ CAMPUS-JALPA

INDICE

PALABRA SANSCRITA INDU

PALABRA SANCSRITA INDU

YA	MÁ	TÁ	RÁ	JA	BHÁ	NA	SA	LA	GÁM
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1

0 → GRAVES

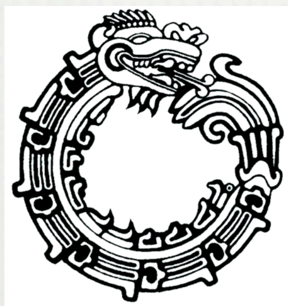
1 → AGUDOS

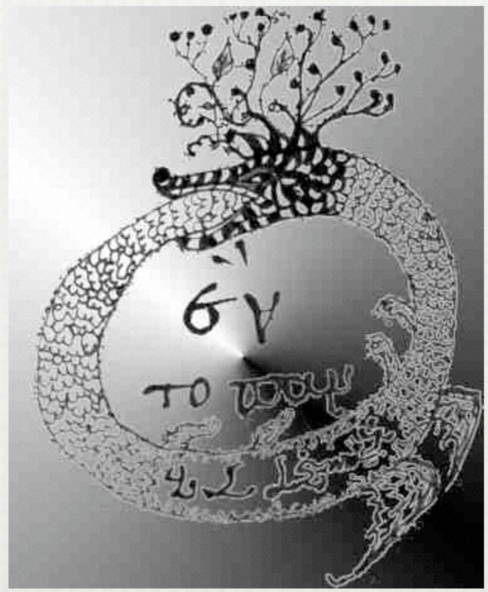
DESDE LOS CORREGUIDOS
PUENTES DE KÖNIGSBERG
LAS VÍBORAS OUROBORO
MARCAN EL RÍTMO
DE LOS TAMBORES
MIENTRAS PROCLAMAN
SER PARIENTES DE LOS ANCESTROS
EN LA EVOLUCIÓN DE LOS AUTÓMATAS
CELULARES UNIDIMENSIONALES...

VÍBORAS OUROBORO

SIMBOLIZA LA ETERNIDAD DEL TIEMP O Y LA CERRADURA DEL UNIVERSO.

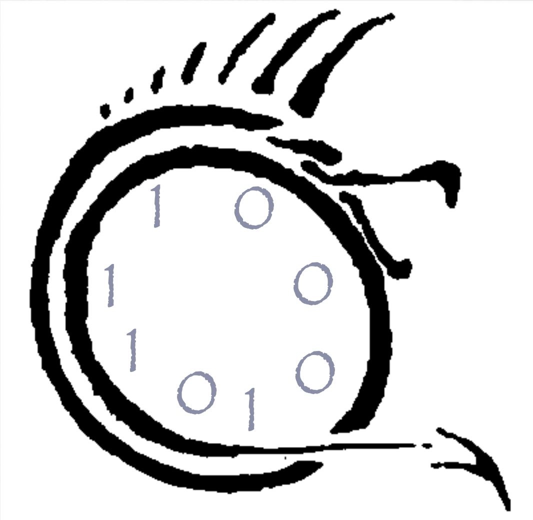
VÍBORAS OUROBORO





VÍBOROS OUROBORO

0111010001



EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

  011

EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

  011
  111

EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

  011
  111
  110

EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

011
111
110
101

EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

  011
  111
  110
  101
  010

EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

011
111
110
101
010
100

EJEMPLO

LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

  011
  111
  110
  101
  010
  100
  000

EJEMPLO

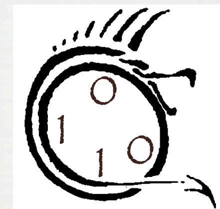
LA MÍNIMA CADENA DE DÍGITOS QUE CONTIENE COMO SUBCADENAS TODAS LAS CADENAS BINARIAS DE TAMAÑO 3

- 0111010001

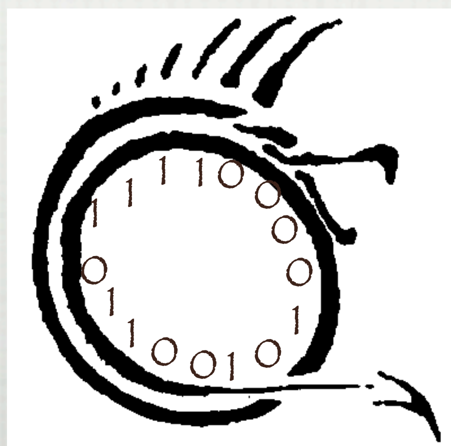
011
111
110
101
010
100
000
001

VÍBOROS OUROBORO

- ANILLOS PARA PARES DE DOS DÍGITOS



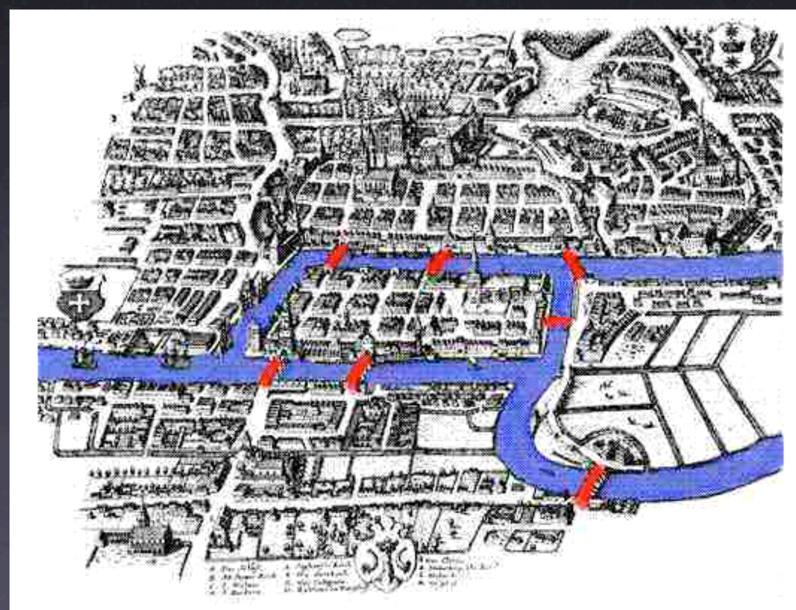
- ANILLOS PARA CUARTETOS DE DOS DÍGITOS



ANILLOS OUROBORO PARA N-TUPLAS CON M DÍGITOS

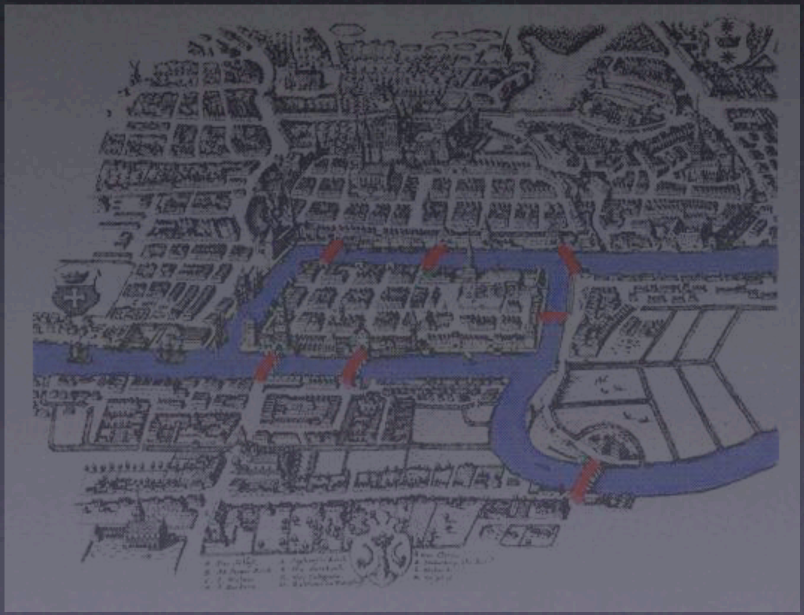
- I.J. GOOD EN 1946 RESOLVIÓ EL PROBLEMA TRANSFORMÁNDOLO EN LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG
- EN 1934 M.H.MARTÍN CREÓ UN ALGORITMO QUE PRODUCE UN ANILLO DE M-TUPLAS CON M-DÍGITOS.
- EN 1946 DE BRUIJIN DEMOSTRÓ QUE EXISTEN ANILLOS DE N-TUPLAS CON 2 DÍGITOS.

Los puentes de Königsberg



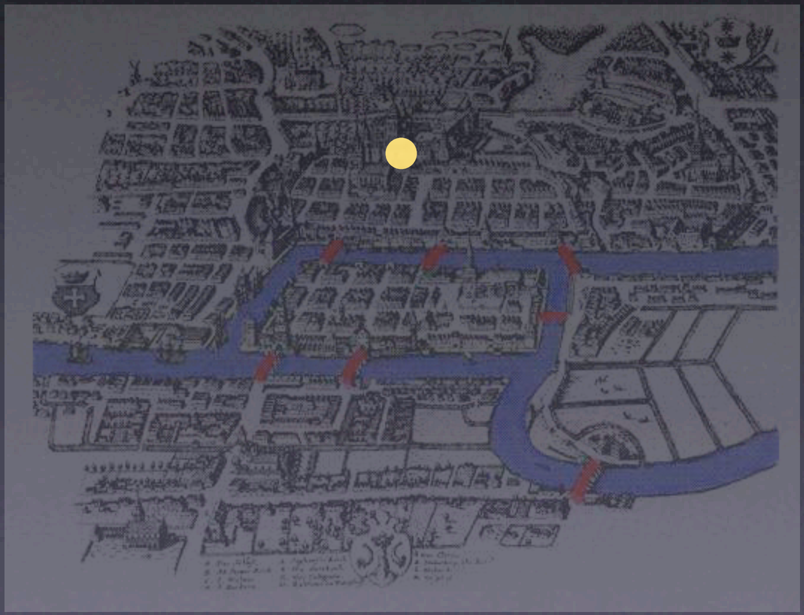
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



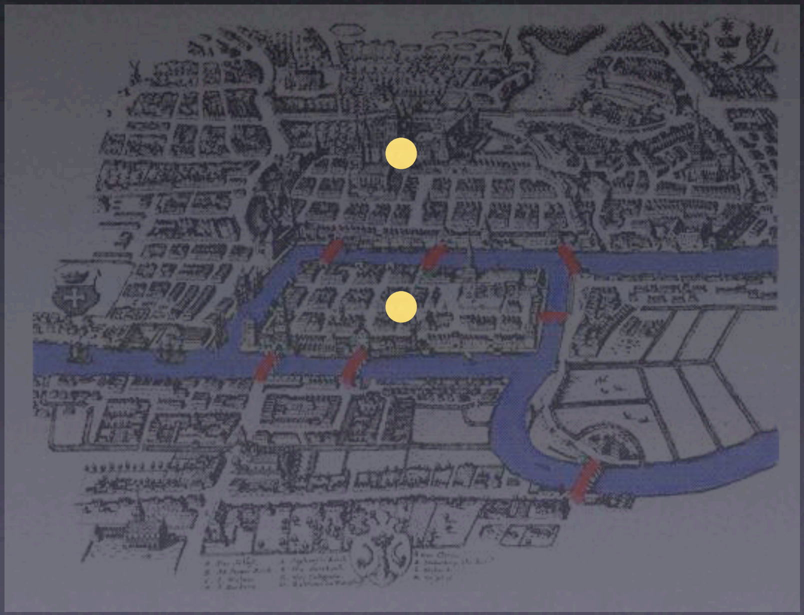
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



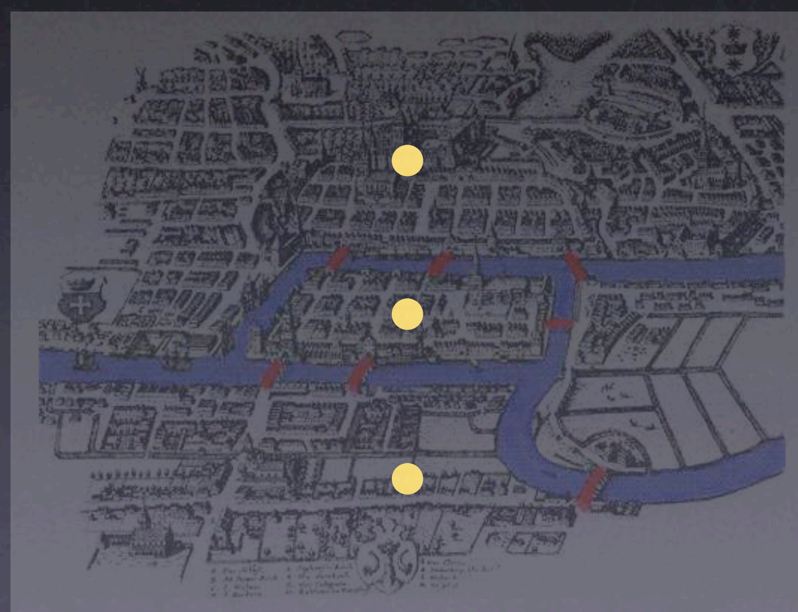
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



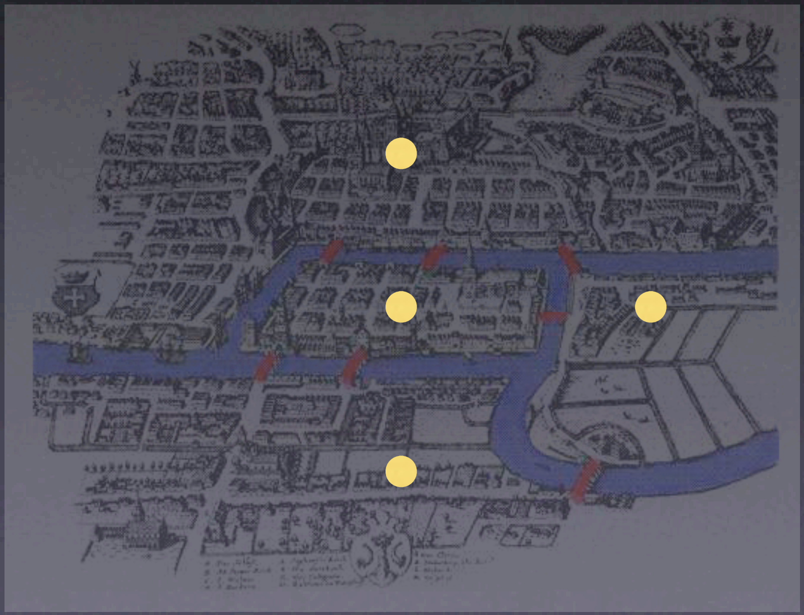
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



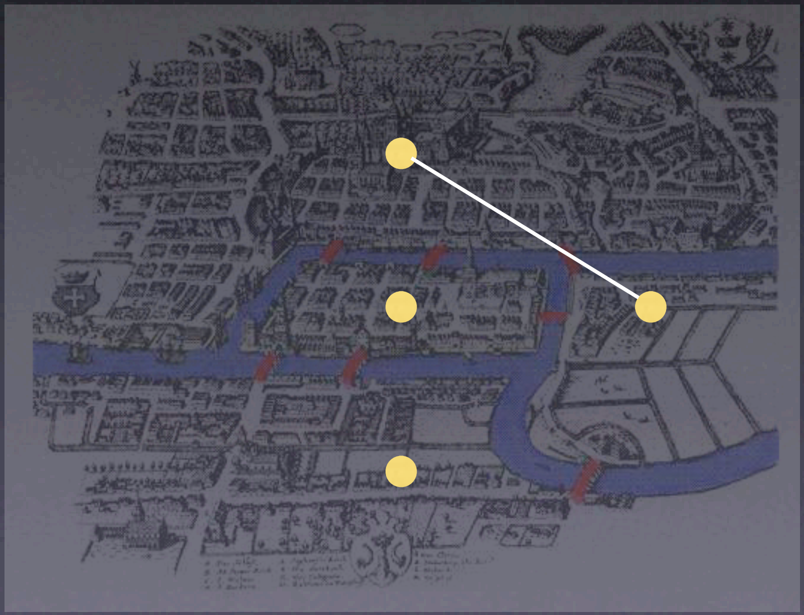
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



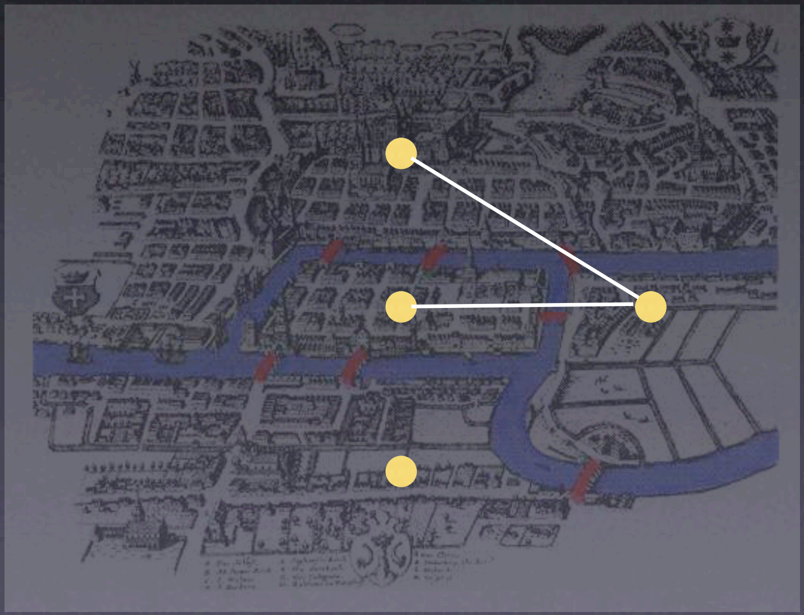
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



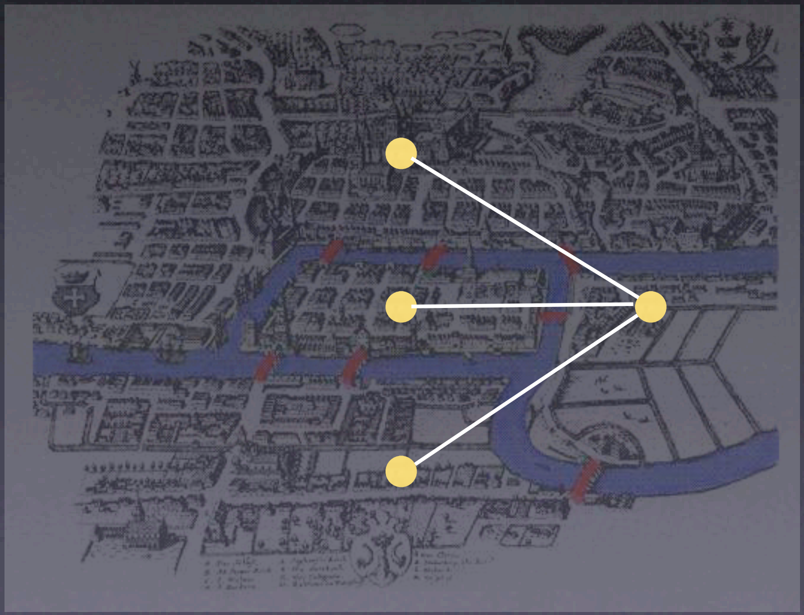
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



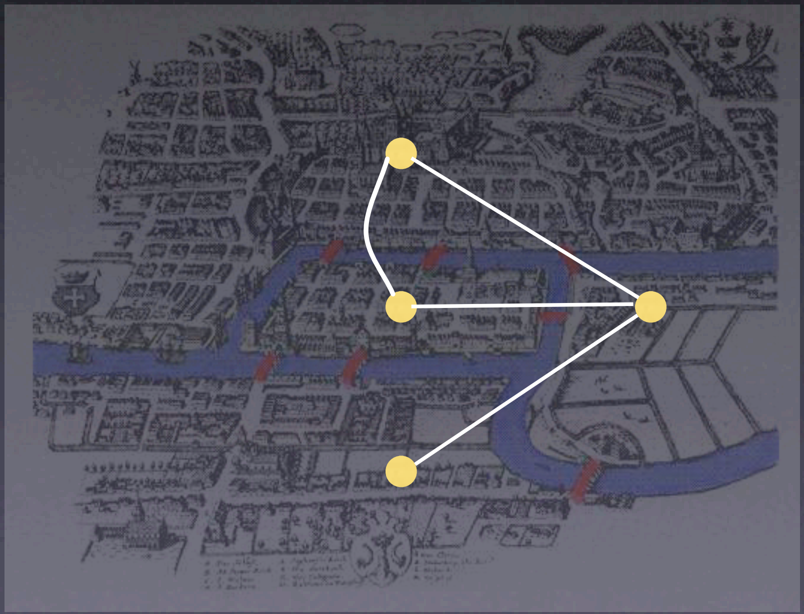
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



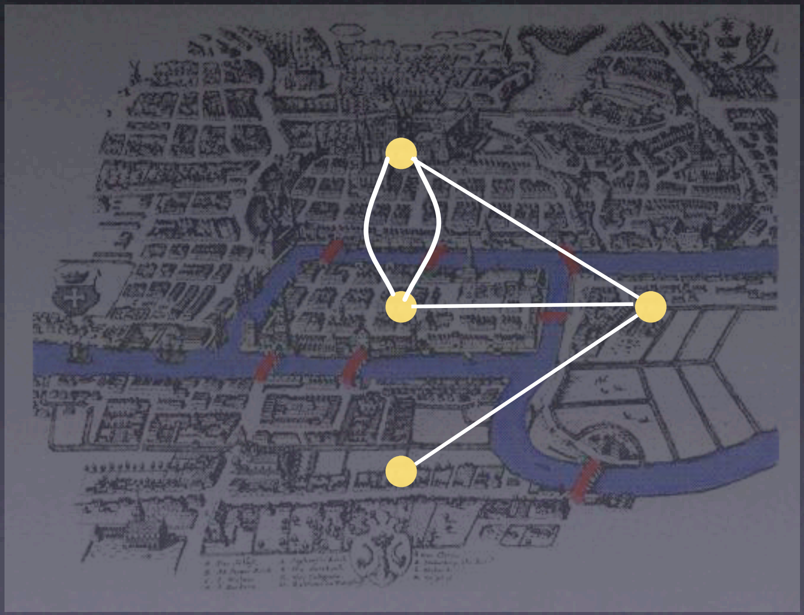
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



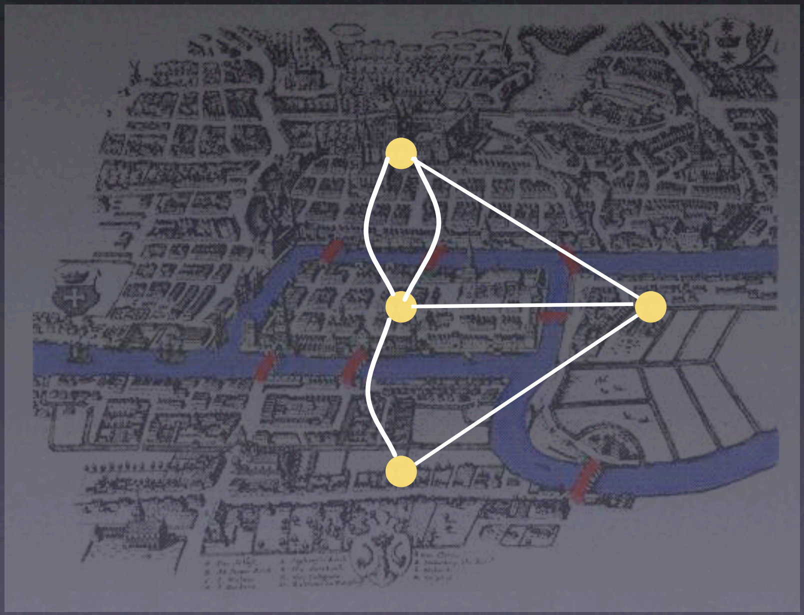
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



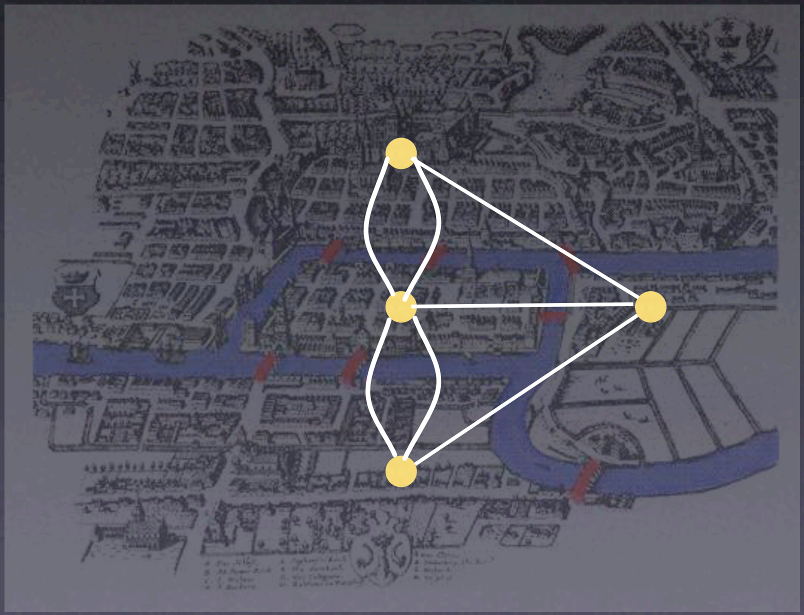
¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Los puentes de Königsberg



¿Es posible dar un paseo cruzando una sola vez todos los puentes?

Leonard Euler

"Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis".

Euler demostró que para que se pueda hacer un recorrido ¨Euleriano¨, la gráfica debe tener a lo más dos nodos con valencia impar

Diagrama de “De Bruijn”

¿Existe la mínima cadena que contenga todas las combinaciones de bloques de cualquier tamaño de 2 dígitos?

¿Existe la mínima cadena que contenga todas las combinaciones de bloques de cualquier tamaño de n dígitos?

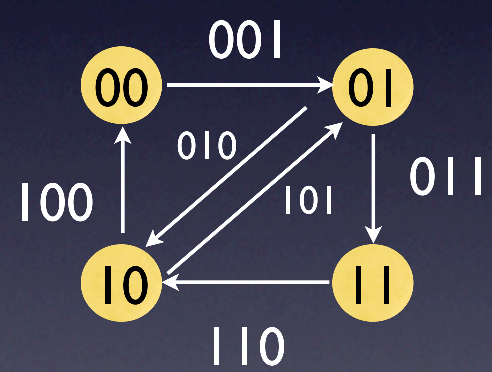
Diagrama de "De Bruijn"

¿Existe la mínima cadena que contenga todas las combinaciones de bloques de cualquier tamaño de 2 dígitos?

¿Existe la mínima cadena que contenga todas las combinaciones de bloques de cualquier tamaño de n dígitos?

Diagrama de “De Bruijn-Good”

000
001
010
011
100
101
110
111



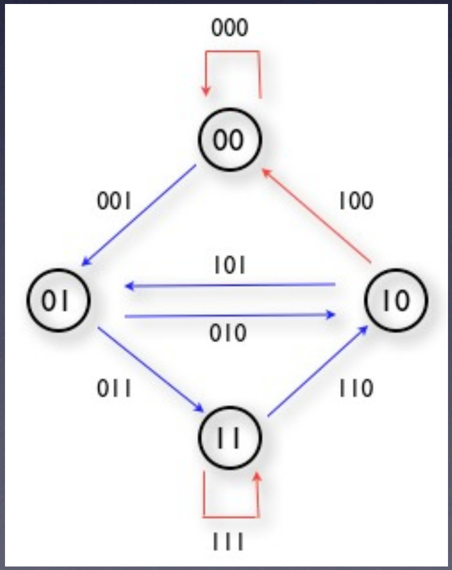
Los diagramas de “De Bruijn”

Es una gráfica cuyos vértices son secuencias de símbolos de un alfabeto y cuyas aristas indican el traslape.

$V(G)$ Vértices

$E(G)$ Aristas

$$\psi_G : V(G) \mapsto V(G)$$



asocia los vértice $i_0 \ldots i_{n-2}$ con los vértice $j_0 \ldots j_{n-2}$ $\quad i_s \in \{0,1\}$

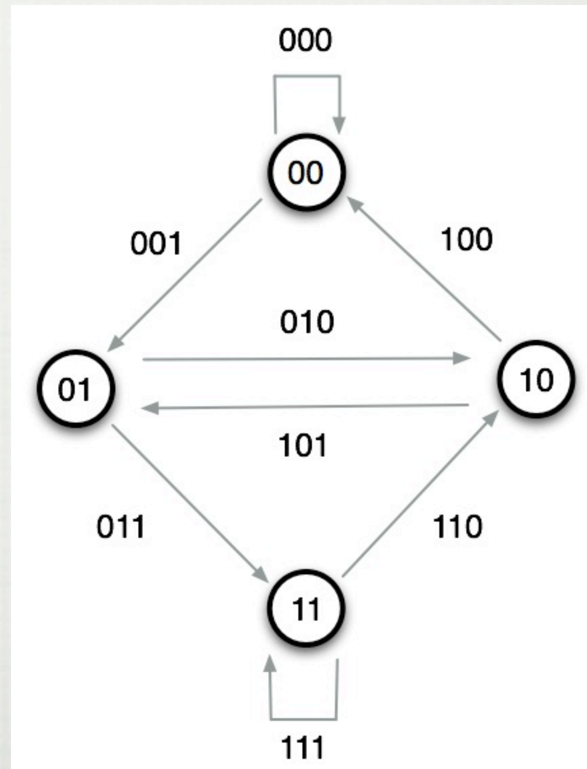
si y sólo si $i_s = j_{s-1}, 1 \leq s \leq n-2.$

Diagrama de "De Bruijn"

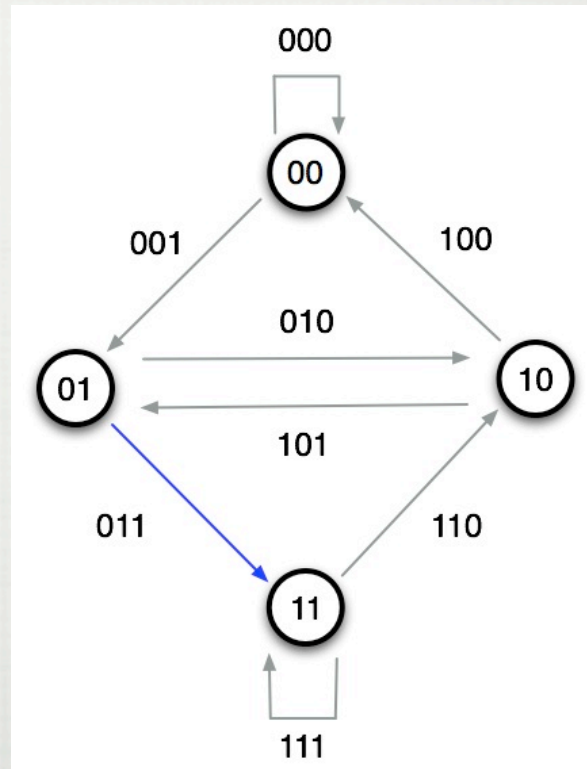
!Si existe la mínima cadena con un alfabeto de dos dígitos que contiene todas las posibles combinaciones de bloques de tamaño cualquier tamaño!

y se genera mediante un paseo Euleriano sobre el Diagrama de ¨De Bruijn¨.

PASEO EULERIANO

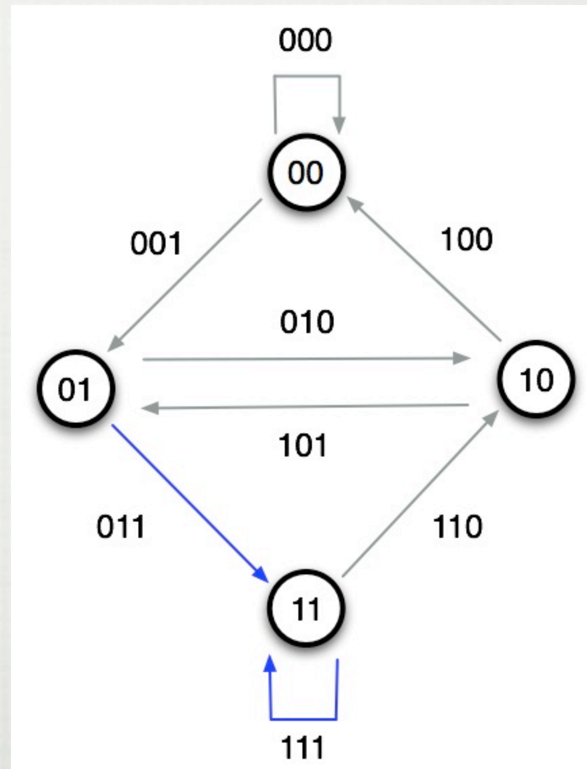


PASEO EULERIANO



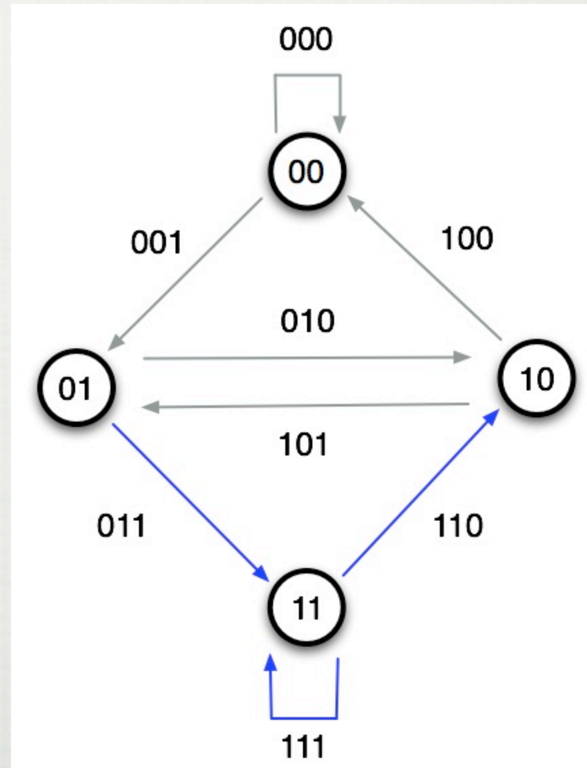
011

PASEO EULERIANO



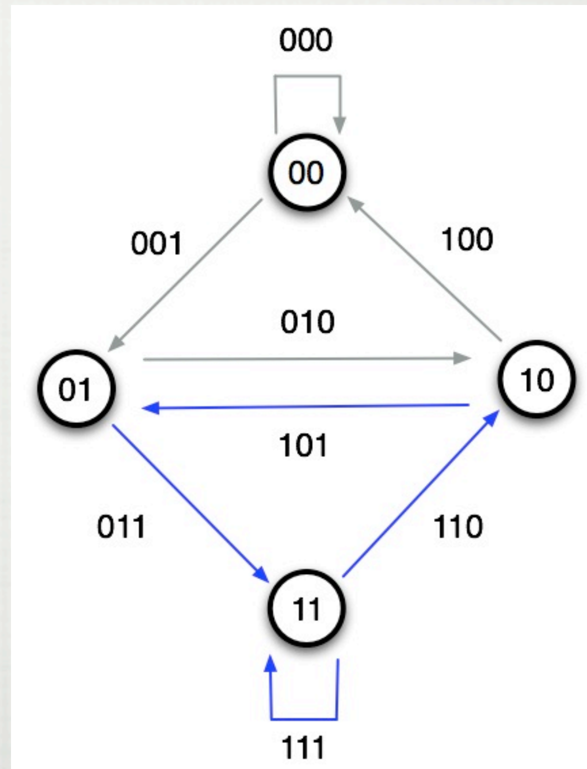
0111

PASEO EULERIANO



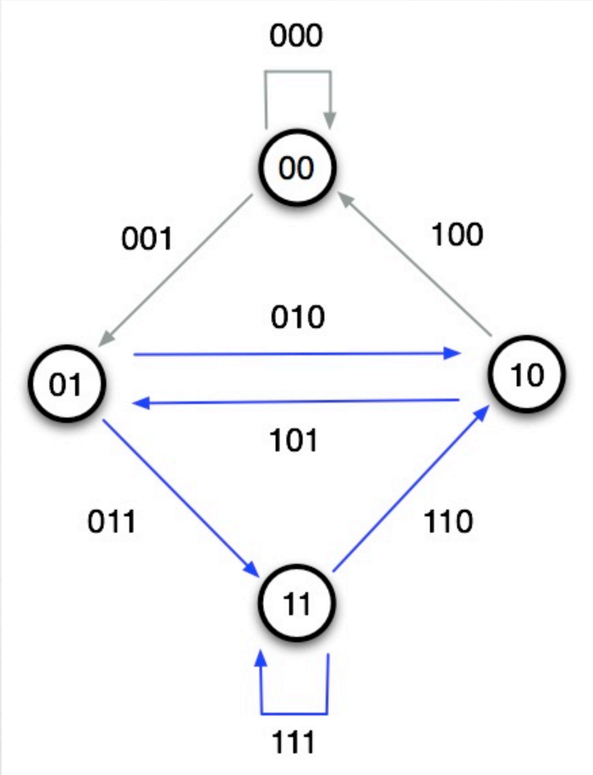
01110

PASEO EULERIANO



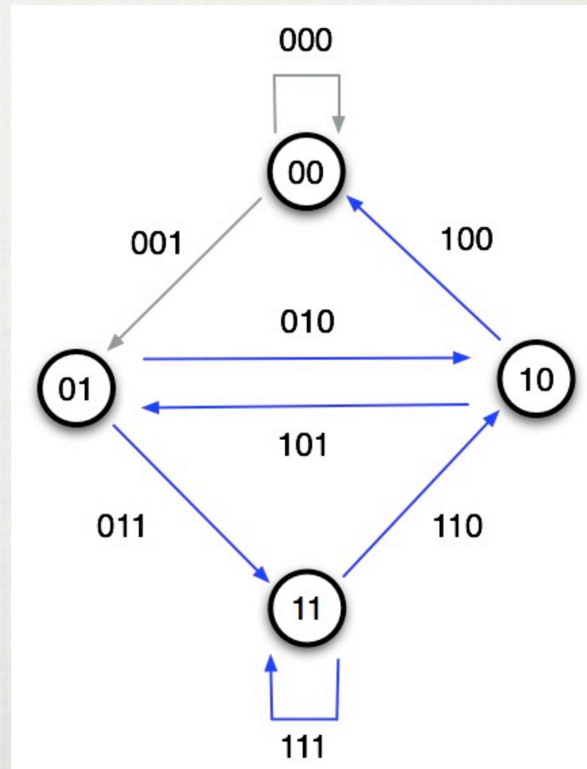
011101

PASEO EULERIANO



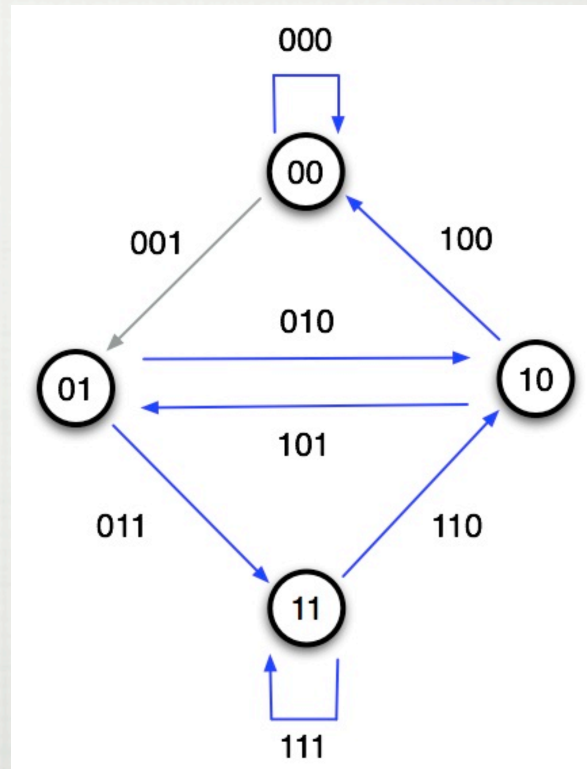
0111010

PASEO EULERIANO



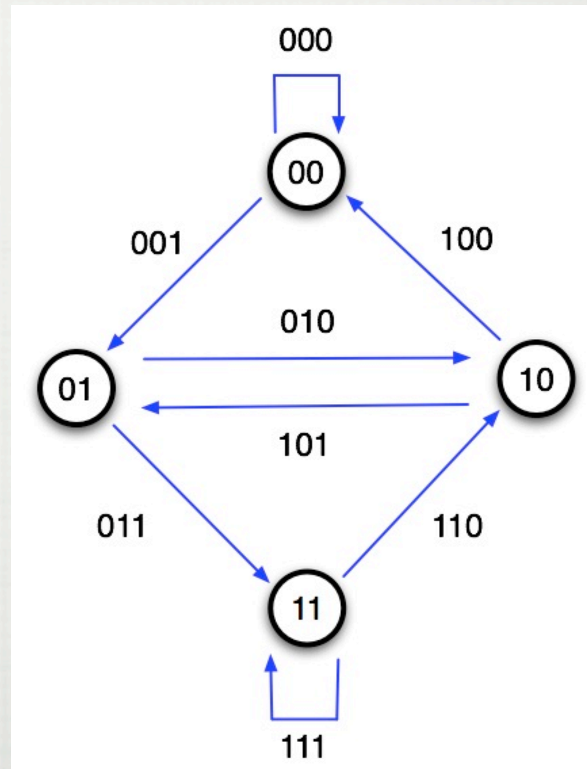
01110100

PASEO EULERIANO



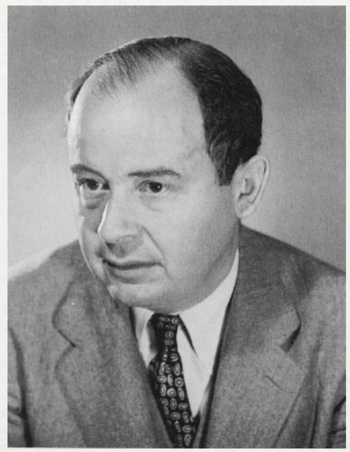
011101000

PASEO EULERIANO



0111010001

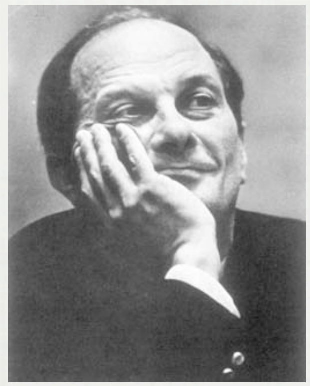
AUTÓMATA CELULAR



AUTOREPRODUCCIÓN

AUTOMATA

AUTÓMATA CELULAR



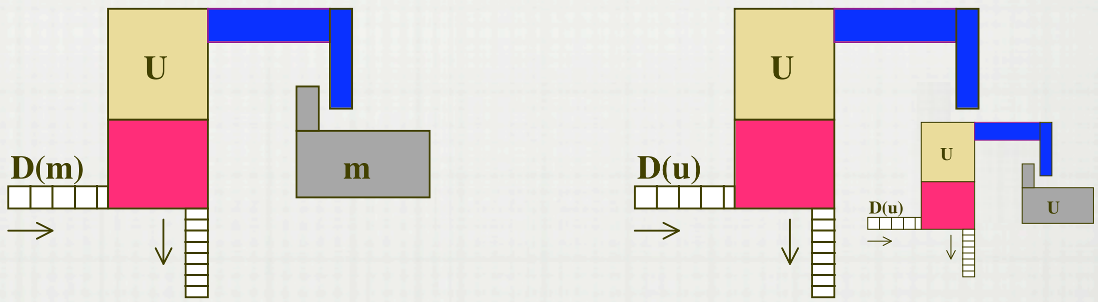
JUEGOS DE PATRONES EN LA COMPUTADORA (JUEGOS DE CELDAS)

AUTÓMATA CELULAR

AUTÓMATA

AUTÓMATA
EN CELDAS

AUTOMATA CELULAR

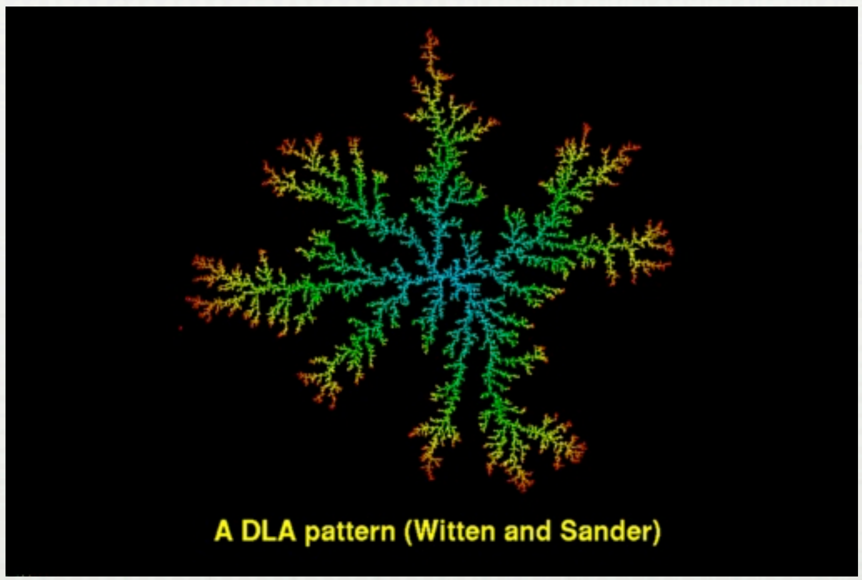


2D, 29 ESTADOS, VECINDAD DE VON NEUMANN

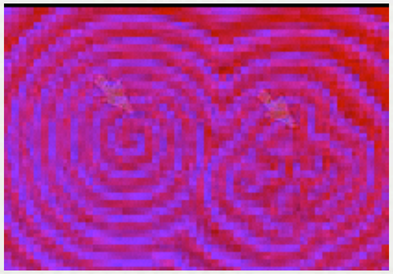
AUTÓMATA CELULAR

AUTÓMATA CELULAR

AUTÓMATA CELULAR



AUTÓMATA CELULAR



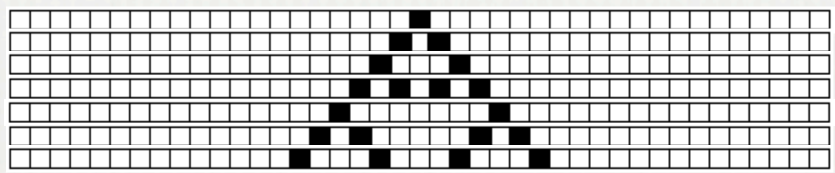
AUTÓMATA CELULAR

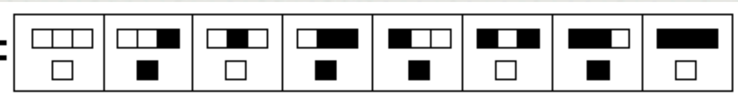
Un autómata celular es un sistema dinámico discreto que consiste en una quintuple $\{\Sigma,\ \Phi,\ \varphi,\ \eta_r(x_i),\ c_0\}$, donde:

- Σ es un conjunto finito de estados, a partir del cual la configuración c toma sus valores, $c : \mathbb{Z} \rightarrow \Sigma$.
- $\eta_r(x_i) = x_{i-r}, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+r}$ es la vecindad x_i de radio r, cuyo tamaño es $\tau = |\eta_r(x_i)|$.
- $\varphi : \Sigma^\tau \rightarrow \Sigma$, es una función local que mapea vecindades de tamaño τ al conjunto de estados Σ.
- C_0, una configuración inicial que es el punto de partida de la evolución.
- Φ es una función global que realiza las transformaciones entre conjuntos de configuraciones.

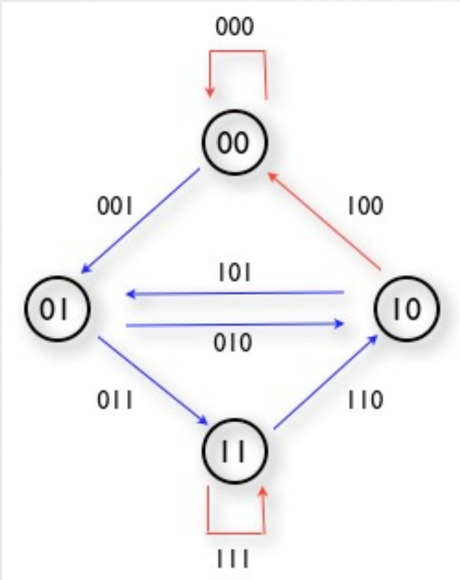
EJEMPLO

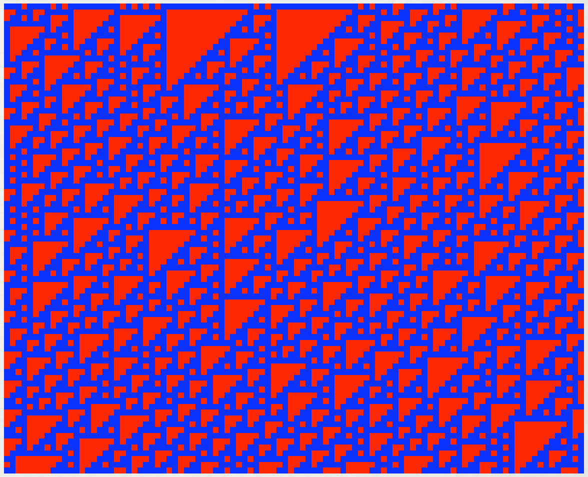
$$\sum = \{\square, \blacksquare\} \qquad\qquad r = 1$$



$\varphi =$ 

LOS DIAGRAMAS DE DEBRUIJIN Y LOS AUTÓMATAS CELULARES





$\varphi = \{ \ 000{,}100{,}111 \rightarrow 0, \ 001{,}010{,}011{,}101{,}110 \rightarrow 1 \ \}$

■ ⇨ 0

■ ⇨ 1

PREIMÁGENES

Las preimágenes de un simple célula son las vecindades localmente válidas definidas por la inversa de la función local

$$\varphi^{-}1(c_x^t) = \{n_x^t - 1 \in \Sigma^N | \varphi(n_x^{t-1} = c_v^t)$$

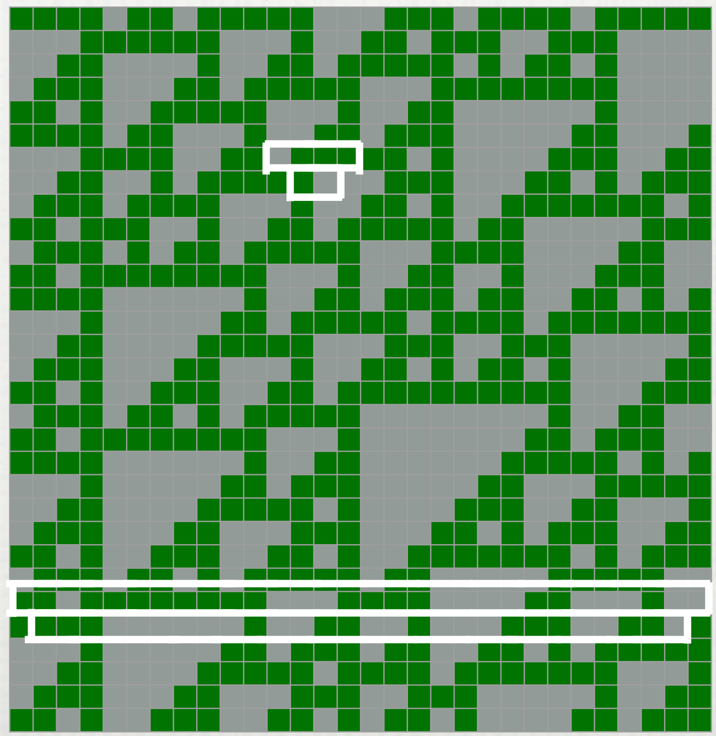
Las preimágenes C^{t-1} de un bloque m son definidas por la inversa de la función local

$$\varphi^{-}1(c_x^t) = \{m_x^t - 1 \in \Sigma^N | \varphi(m_x^{t-1} = c_v^t)$$

Los vecindades localmente válidas de células adyacentes deben traslapar correctamente para dar un bloque m válido.

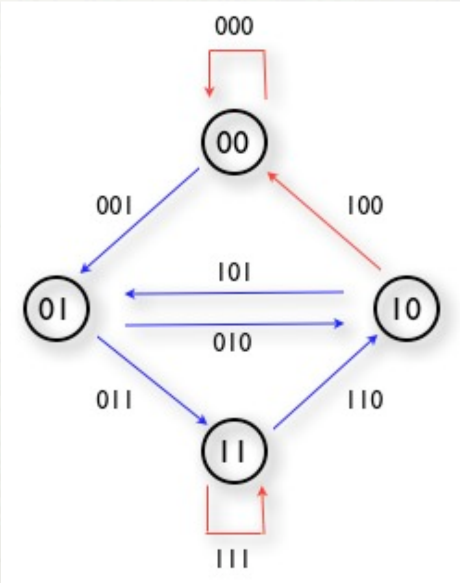
EJEMPLO DE PREIMÁGENES

- $\rightarrow 0$
- $\rightarrow 1$



LAS PREIMÁGENES Y LOS DIAGRAMAS DE DEBRUIJIN

ETIQUETANDO LAS ARISTAS COMO LAS VECINDADES Y COMO LOS MAPEOS DE LAS VECINDADES



0111
10

■ ⇨ 0

■ ⇨ 1

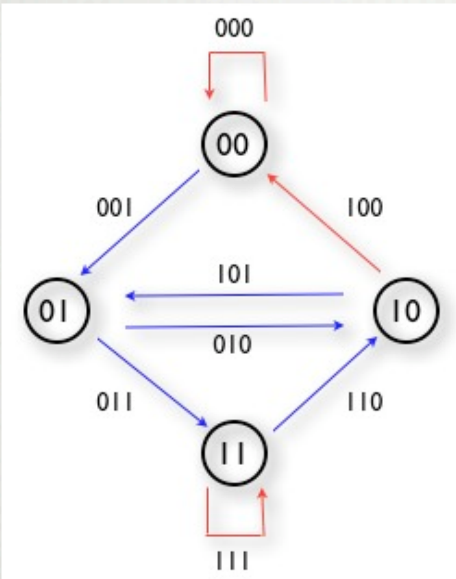
MATRIX REPRESENTATION OF THE DEBRUIJIN GRAPH

Sean v_i y $v_j \in V(G)$ vértices del diagrama de *De Bruijn* para $i, j = 1, 2, 3, \ldots, |V(G)|$. La matriz de preimágenes $M(s)_{i,j}$ del estado $s \in \Sigma$ esta definido como:

$$M(s)_{i,j} = \begin{cases} \{N(v_i v_j)\} & \text{If } \phi(N(v_i, v_j)) = s \text{ donde } s \in \Sigma \\ \emptyset & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

donde $N(v_i, v_j)$ son las vecindades representadas por v_i y v_j para $i, j = 1 \ldots |V(G)|$ con sus correspondientes mapeos a$s \in \Sigma$. Para simplificar la notación $M(s)_{i,j}$ esta denotada por M_s.

MATRIZ DE PREIMAGENES DEL ESTADO 0

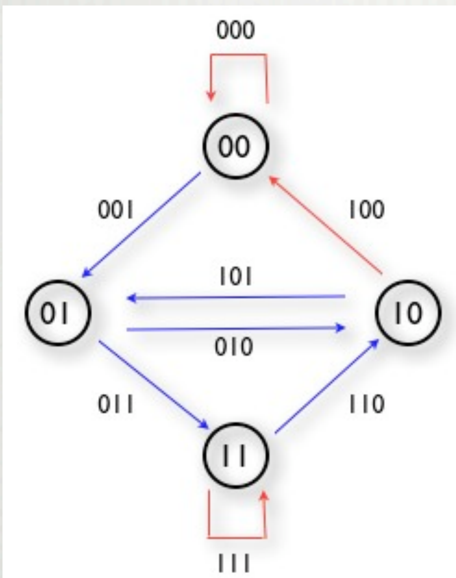


$$
M_0 = \begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\{\text{“000”}\} & \emptyset & - & - \\
- & - & \emptyset & \emptyset \\
\{\text{“100”}\} & \emptyset & - & - \\
- & - & \emptyset & \{\text{“111”}\}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$\Rightarrow 0$

$\Rightarrow 1$

MATRIZ DE PREIMÁGENES DEL ESTADO 1



$$M_1 = \begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{“001”}\} & - & - \\ - & - & \{\text{“010”}\} & \{\text{“011”}\} \\ \emptyset & \{\text{“101”}\} & - & - \\ - & - & \{\text{“110”}\} & \emptyset \end{pmatrix} \end{array}$$

$\Rightarrow 0$

$\Rightarrow 1$

OPERADOR ENTRE MATRICES QUE CALCULA LAS PREIMÁGENES

Sean A $= [\mathbf{a}_{ik}]$ y B $= [\mathbf{b}_{kj}]$ matrices de preimágenes $n \times n$. El operador $\bigodot$ de A y B denotado por A $\bigodot$ B es una matriz de preimágenes C, cuyos elementos $\mathbf{c}_{i,j}$ estan definidos por:

$$\mathbf{c}_{i,j} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbf{a}_{ik} \bigotimes \mathbf{b}_{kj} \tag{1}$$

donde

$$\mathbf{a}_{ik} \bigotimes \mathbf{b}_{kj} = \begin{cases} \{a_{iku} \bigtriangledown b_{kj1}\} \text{ para } 1 \leq u \leq |a_{ik}| & \text{If } \mathbf{a}_{ik} \neq \emptyset \text{ y } \mathbf{b}_{kj} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{otro caso} \end{cases}$$

el operador $\bigtriangledown$ es una concatenación especial, esta concatena a_{iku} con el último elemento de b_{kj1}.

Ejemplo:

$$\mathrm{M}_{01} = \mathrm{M}_0 \odot \mathrm{M}_1$$

$$\underset{\mathrm{M}_0}{\begin{pmatrix} \{\text{“000”}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{\text{“100”}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{\text{“111”}\} \end{pmatrix}} \odot \underset{\mathrm{M}_1}{\begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{“001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“010”}\} & \{\text{“011”}\} \\ \emptyset & \{\text{“101”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“110”}\} & \emptyset \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{M}_{01} \quad \begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{“0001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{\text{“1001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“1110”}\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

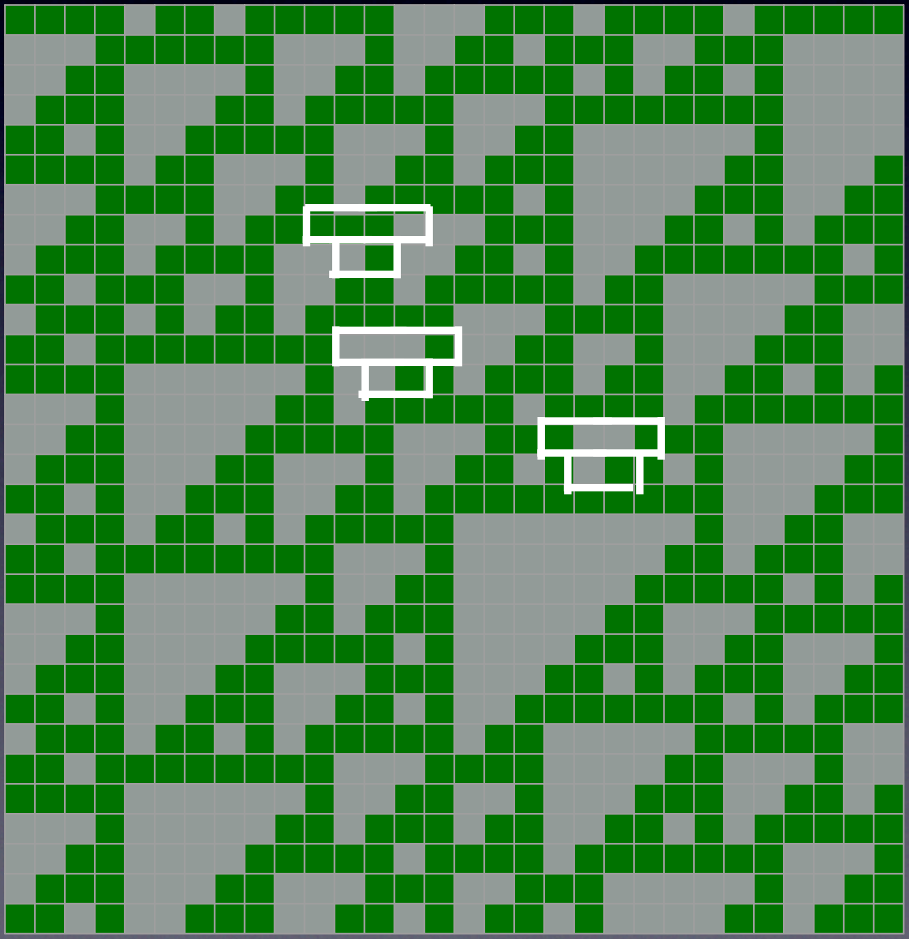
Ejemplo:

$$\mathrm{M}_{01} = \mathrm{M}_0 \odot \mathrm{M}_1$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_0 & & \mathrm{M}_1 \\ \begin{pmatrix} \{\text{“000”}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{\text{“100”}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{\text{“111”}\} \end{pmatrix} & \odot & \begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{“001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“010”}\} & \{\text{“011”}\} \\ \emptyset & \{\text{“101”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“110”}\} & \emptyset \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathrm{M}_{01} \quad \begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{“0001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{\text{“1001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“1110”}\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

Preimágenes de la cadena 01



$\blacksquare \longrightarrow 0$

$\blacksquare \longrightarrow 1$

$$\mathrm{M}_{01}$$

$$\begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{“0001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{\text{“1001”}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“1110”}\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

Cálculo de preimágenes

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_w$$

$$\mathrm{M}_{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k} = ((((\mathrm{M}_{a_1} \odot \mathrm{M}_{a_2}) \odot \mathrm{M}_{a_3}) \odot \ldots) \odot \mathrm{M}_{a_w}).$$

Note que este operador no es asociativo, ni conmutativo y tiene un inverso neutro.

Ejemplo:

Preimágenes of “01001”

$$\mathrm{M}_{01001} = ((((\mathrm{M}_0 \odot \mathrm{M}_1) \odot \mathrm{M}_0) \odot \mathrm{M}_0) \odot \mathrm{M}_1)$$

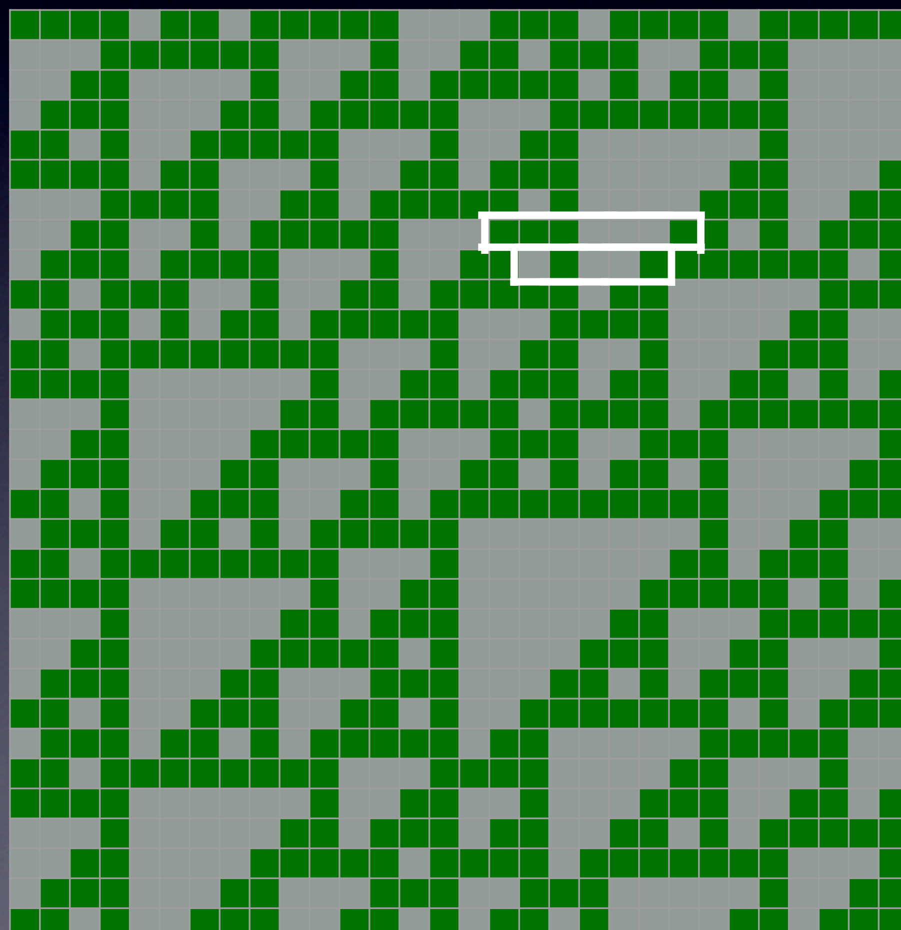
$$M_{01001} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“1110001”}\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

Preimágenes de la cadena 01001

$\longrightarrow 0$

$\longrightarrow 1$

$$= \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{“1110001”}\} & \emptyset \end{pmatrix}$$



Contacto

José Manuel Gómez Soto
Posgrado e Investigación
Universidad la Salle
México
www.ci.ulsa.mx/~jmgomez
jmgomezgoo@gmail.com

http://cellular.ci.ulsa.mx/