

Caracterización de las densidades en AC convencionales y AC con retardos

José Manuel Gómez Soto
Universidad La Salle

Dr. Harold V. McIntosh
Universidad de Puebla

Contenido

- AC convencionales
- Caracterización de la densidad
- Polinomios de densidad
- Convergencia
- AC con retardos
- Conclusiones
- Trabajos futuros

Autómata Celular unidimensional

Un autómata celular unidimensional es un sistema dinámico discreto que consiste de una quintupla, $\{\Sigma, \Phi, \varphi, \eta_r(x_i), c_0\}$, donde:

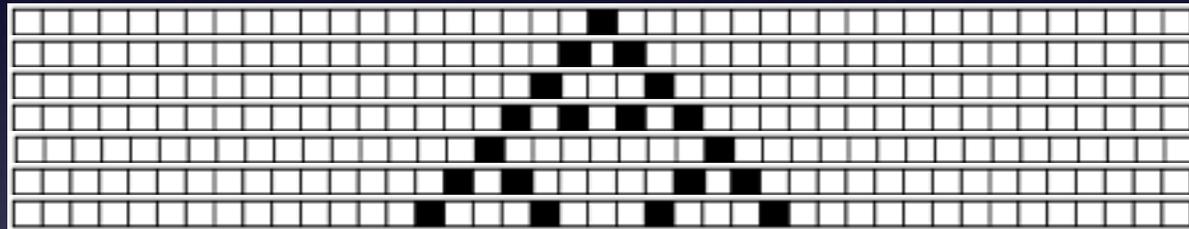
- Σ es un conjunto finito de estados, a partir del cual las configuraciones de c células toman sus valores, $c : \mathbb{Z} \rightarrow \Sigma$.
- $\eta_r(x_i) = x_{i-r}, \dots, x_i, \dots, x_{i+r}$ es la vecindad de x_i de radio r , cuyo tamaño es $\tau = |\eta_r(x_i)|$.
- $\varphi : \Sigma^\tau \rightarrow \Sigma$, una función local que mapea vecindades de tamaño τ a un conjunto de estados Σ .
- C_0 , una configuración inicial a partir de la cual se comienza la evolución.
- Φ una función global que calcula transformaciones entre conjuntos de configuraciones.

Regla local

$$\sigma_i^{t+1} = \phi(\sigma_{i-r}^t, \sigma_{i-r+1}^t, \dots, \sigma_i^t, \dots, \sigma_{i+r-1}^t, \sigma_{i+r}^t)$$

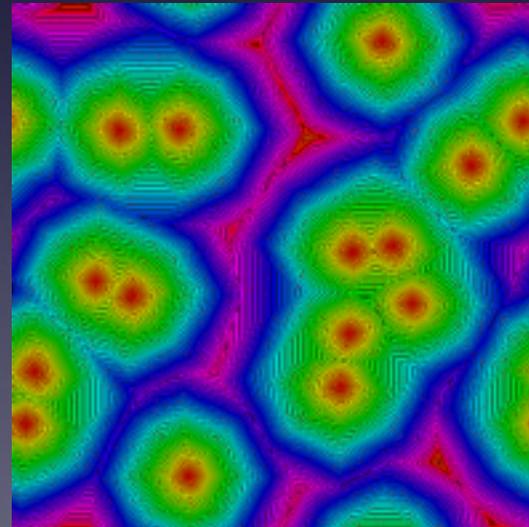
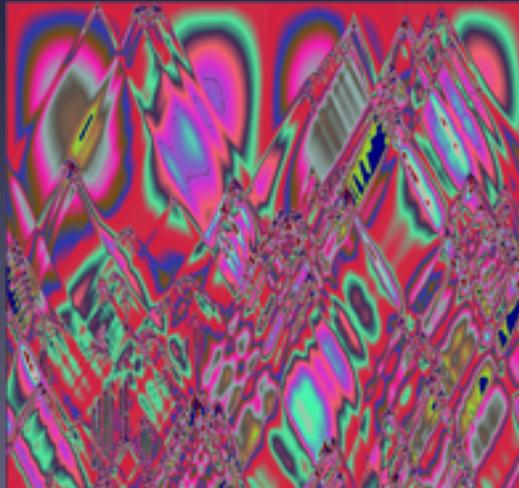
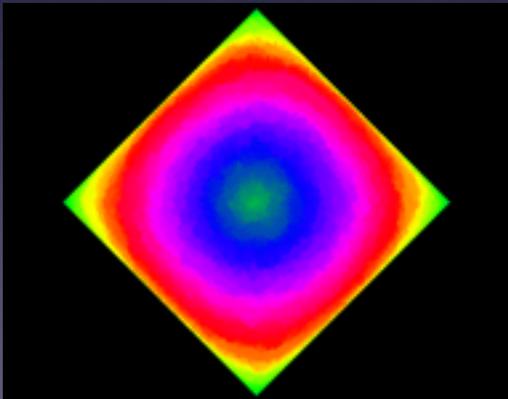
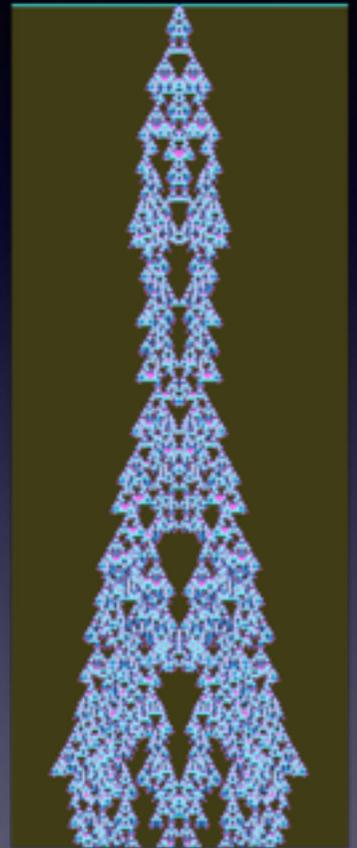
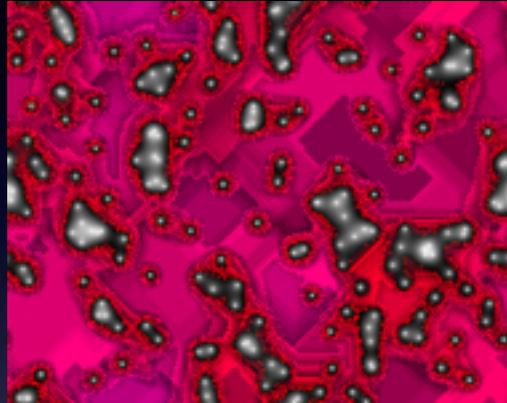
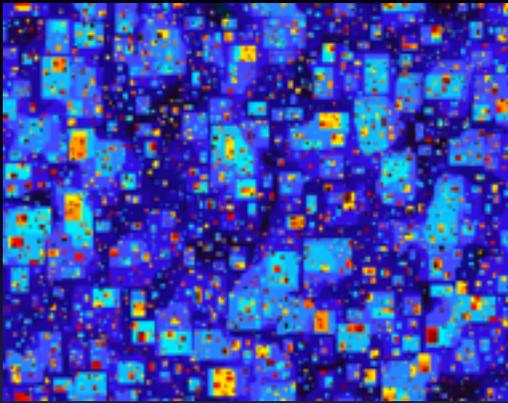
Autómata celular en una dimensión

$$\Sigma = \{\blacksquare, \square\} \quad r = 1$$

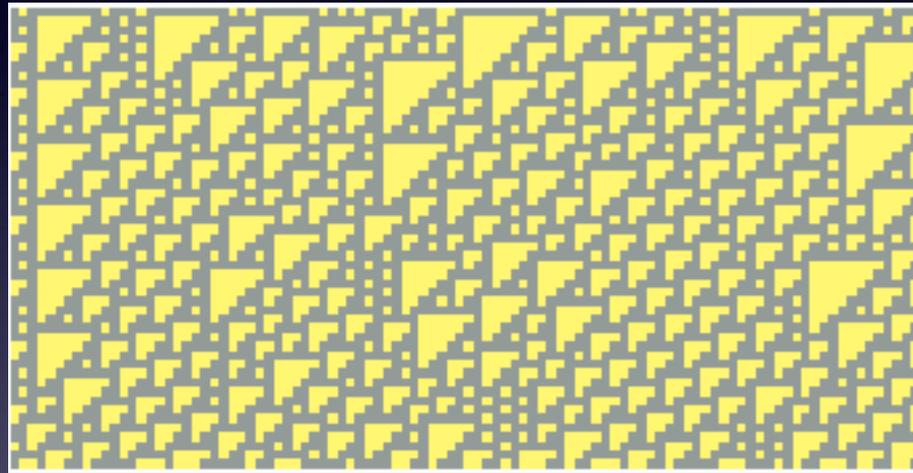


$$\varphi = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \square\square\square & \square\square\blacksquare & \square\blacksquare\square & \square\blacksquare\blacksquare & \blacksquare\square\square & \blacksquare\square\blacksquare & \blacksquare\blacksquare\square & \blacksquare\blacksquare\blacksquare \\ \hline \square & \blacksquare & \square & \blacksquare & \blacksquare & \square & \blacksquare & \square \\ \hline \end{array}$$

Ejemplos de evoluciones en AC



Densidades en AC



81/100

⋮

43/100

Predicción de las densidades

Caracterización de densidades en AC

- Statistical study in CA

- Dresden, M. and Wong, D., "Life games and statistical models," Proceedings of the National Academy of Sciences, 72, 956-960 (1975).

- Mean field theory

- Schulman, L.S. and Seiden P.E., "Statistical mechanics of a dynamical system based on Conway's game of life," Journal of Statistical Physics 19, 293-314 (1978).
- Wolfram, Stephen. "Statistical mechanics of cellular automata," Review of Modern Physics, 55, No 3, 601-644 (1983).

- Local structure theory

- Gutowitz, Howard A., "Local structure theory for cellular automata," Ph.D. thesis, Rockefeller University (1987).

Teoría del campo medio

$$x_j(t+1) = \sum_{(c_1, \dots, c_m) \in \mathcal{A}^m} W((c_1, \dots, c_m) \rightarrow c^j)$$

$$\prod_{i=1}^m \sum_{k=1}^{|\mathcal{A}|} (\delta_{c_i, c_k}) x_k(t)$$

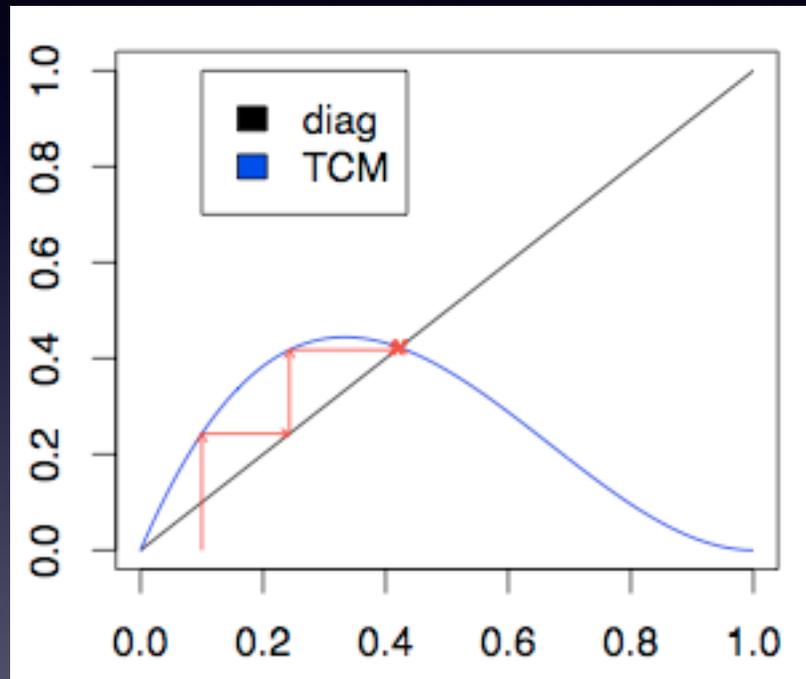
$$\delta_{c_i, c_k} = 1 \text{ si } c_i = c_k$$

$$\delta_{c_i, c_k} = 0 \text{ si } c_i \neq c_k$$

Teoría del campo medio

$$\begin{array}{lll} & p \mapsto 1 & \\ & q \mapsto 0 & \\ \varphi(000) \mapsto 0 & & \varphi(qqq) \mapsto q \\ \varphi(001) \mapsto 1 & & \varphi(qqp) \mapsto p \\ \varphi(010) \mapsto 1 & & \varphi(qpq) \mapsto p \\ \varphi(011) \mapsto 0 & \longrightarrow & \varphi(qpp) \mapsto q \longrightarrow f(p) = 3pq^2 \\ \varphi(100) \mapsto 1 & & \varphi(pqq) \mapsto p \\ \varphi(101) \mapsto 0 & & \varphi(pqp) \mapsto q \\ \varphi(110) \mapsto 0 & & \varphi(ppq) \mapsto q \\ \varphi(111) \mapsto 0 & & \varphi(ppp) \mapsto q \end{array}$$

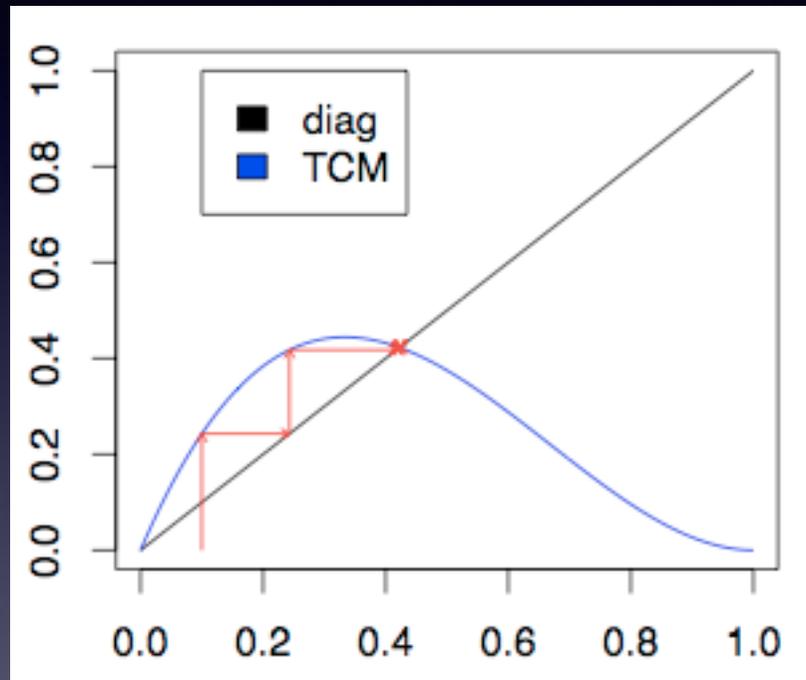
Teoría del campo medio



$$f(p) = 3q^2 p$$

Teoría del campo medio

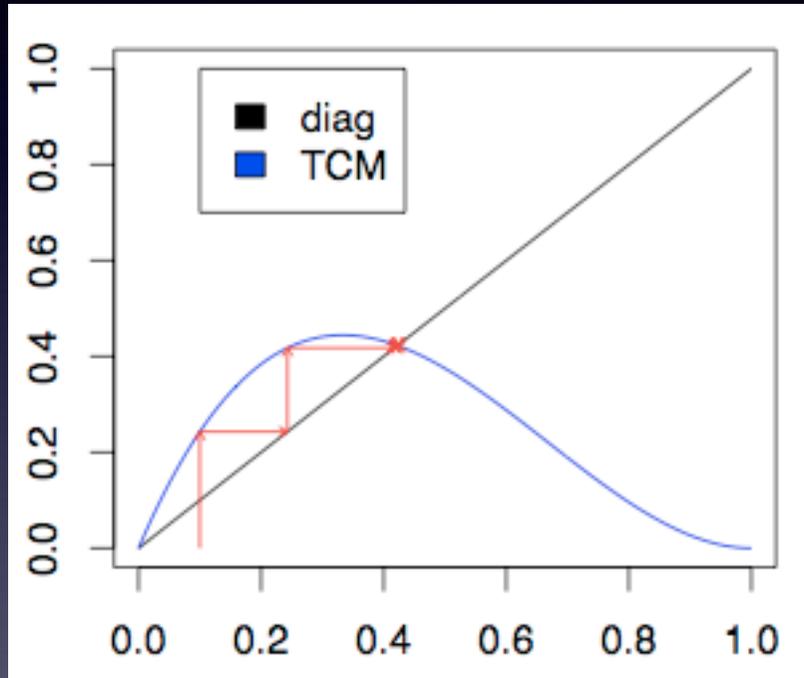
Ventajas: Conecta la regla local con el comportamiento global.



$$f(p) = 3q^2p$$

Teoría del campo medio

Ventajas: Conecta la regla local con el comportamiento global.



Desventajas: No es preciso.

$$f(p) = 3q^2p$$

Teoría de estructura local

Gutowitz

$$P_b^{t+1} = \sum_{B|\varphi(B)\mapsto B} P_B^t$$

$$P_n^{t+1}(B') = \sum_{B \in B_{n+2r}} \delta(\varphi(B), B') \frac{P_n^t(\mathbf{R}^2 B) P_n^t(\mathbf{R} L B) P_n^t(\mathbf{L}^2 B)}{P_n^t(\mathbf{R}^2 L B) P_n^t \mathbf{L}^2 \mathbf{R} B}$$

Teoría de estructura local

Gutowitz

$$P_b^{t+1} = \sum_{B|\varphi(B)\mapsto b} P_B^t$$

$$P_n^{t+1}(B') = \sum_{B \in B_{n+2r}} \delta(\varphi(B), B') \frac{P_n^t(\mathbf{R}^2 B) P_n^t(\mathbf{R} \mathbf{L} B) P_n^t(\mathbf{L}^2 B)}{P_n^t(\mathbf{R}^2 \mathbf{L} B) P_n^t \mathbf{L}^2 \mathbf{R} B}$$

Ventaja: Es preciso.

Teoría de estructura local

Gutowitz

$$P_b^{t+1} = \sum_{B|\varphi(B)\mapsto B} P_B^t$$

$$P_n^{t+1}(B') = \sum_{B \in B_{n+2r}} \delta(\varphi(B), B') \frac{P_n^t(\mathbf{R}^2 B) P_n^t(\mathbf{R} L B) P_n^t(\mathbf{L}^2 B)}{P_n^t(\mathbf{R}^2 L B) P_n^t \mathbf{L}^2 \mathbf{R} B}$$

Ventaja: Es preciso.

Desventaja: se pierde la conexión local con el comportamiento colectivo.

¿Es posible una tercer alternativa?

Un método que tenga las ventajas de MFT y LST

La ventaja de la precisión y el mantener la conexión entre la regla local y el comportamiento global

Polinomios de densidad

Polinomios de densidad

Metáfora:

Para calcular la probabilidad de que ocurra el estado I necesitamos calcular la probabilidad de que ocurran sus preimágenes.

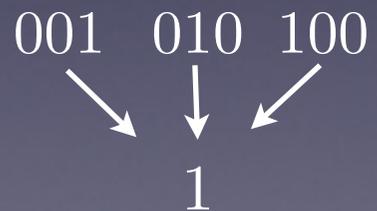
Para calcular la probabilidad de que ocurran las preimágenes del estado I, necesitamos calcular la probabilidad de que ocurran las preimágenes de las preimágenes del estado I

y así en adelante...

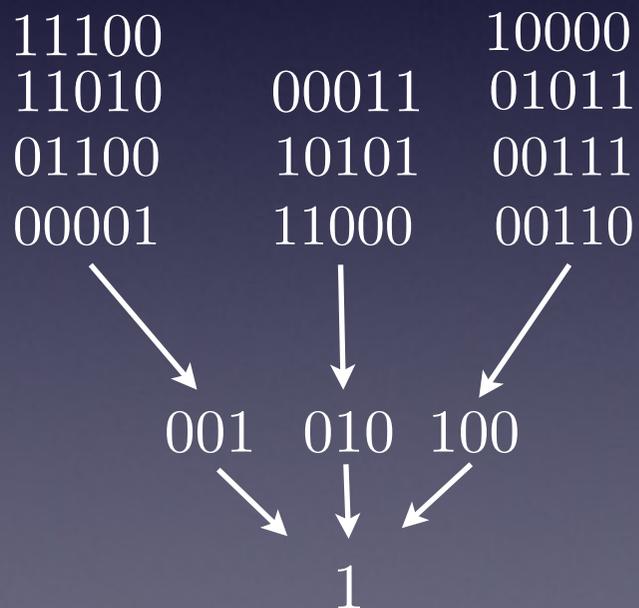
Polinomios de densidad en autómatas celulares en una
dimensión.

Polinomios de densidad

Polinomios de densidad



Polinomios de densidad



Polinomios de densidad

11100		10000
11010	00011	01011
01100	10101	00111
00001	11000	00110

001 010 100

1



$$f(p) = 3pq^2$$

Polinomios de densidad

11100		10000
11010	00011	01011
01100	10101	00111
00001	11000	00110

001 010 100

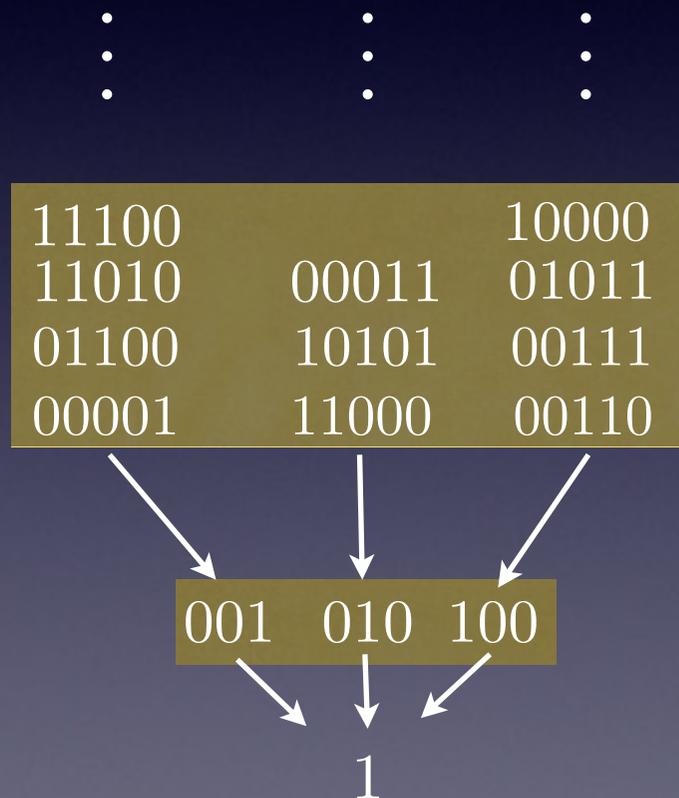
1

$$\longrightarrow f(p) = 2q^4p + 4q^3p^2 + 5q^2p^3$$

$$\longrightarrow f(p) = 3pq^2$$



Polinomios de densidad



→ $f(p) = 2q^4p + 4q^3p^2 + 5q^2p^3$



$f(p) = 3pq^2$



Polinomios de densidad

$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x)))) \dots$

Iteración de funciones

Polinomios de densidad

$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x)))) \dots$



1

Iteración de funciones

Polinomios de densidad

$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x)))) \dots$

↓ ↓
1 100
 001
 010

Iteración de funciones

Polinomios de densidad

$x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), f(f(f(f(x)))) \dots$

↓ ↓ ↓

1 100 10101
 001 11000
 010 11100 . . .
 11010
 01100
 00001
 00011
 00110
 00111
 01011
 10000

Iteración de funciones

Preimágenes

Para calcular los polinomios de densidad se requiere calcular las preimágenes

Preimágenes

Para calcular los polinomios de densidad se requiere calcular las preimágenes

Andrew Wuensche
Burton Voorhees
McIntosh

Cálculo de Preimágenes mediante el diagrama de “de Bruijn”

Los diagramas de “de Bruijn”

- En 1946, N.G. de Bruijn y Good crearon los diagramas para resolver un problema combinatorio.
 - De Bruijn, N.G., "A combinatorial problem," Akadamie van wetenschappen, Amsterdam, 8 (1946) 461-467. Good I.J., "Normal recurring decimals," Journal of the London Mathematical Society, 21, 167-169 (1946).
- En 1978, Nasu estudio de mapeos sobreyectivos.
 - Nasu, M., "Local maps inducing surjective local maps of one dimensional tessellation automata," Mathematical System Theory, 11 (1978) 327-351.
- En 1984, Wolfram los utiliza en el contexto de teoría de la computación.
 - Wolfram, S., "Computation theory of cellular automata," Communications in Mathematical Physics, 96. (1984) 15--57.

Los diagramas de de Bruijn

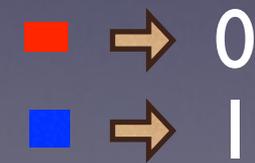
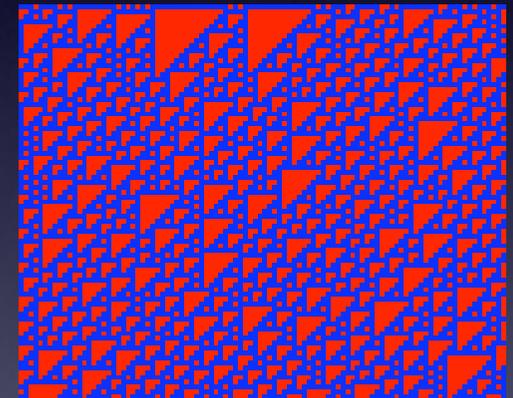
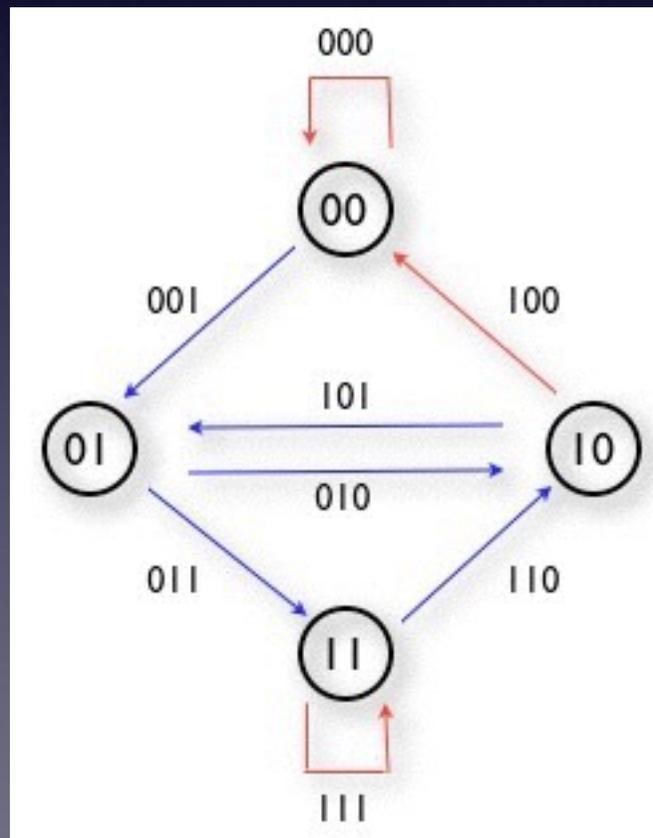
- En 1989, Erica Jen. Para enumerar preimágenes
 - Jen, E., "Enumeration of Preimages of Cellular Automata," *Complex Systems*, 3(1989), 421-456.
- En 1991, McIntosh. Calcular la proliferación of preimágenes.
 - McIntosh, H.V., "Linear Cellular Automata via deBruijn Diagram," <http://delta.cs.cinvestav.mx/~mcintosh/comun/cf/debruijn.pdf> (1991).
- En 1991, Sutner. Estudiar AC reversibles.
 - Sutner K., "De Bruijn Graphs and Linear Cellular Automata," *Complex Systems*, 5 (1991) 19-30.

Los diagramas de "de Bruijn" en los AC.

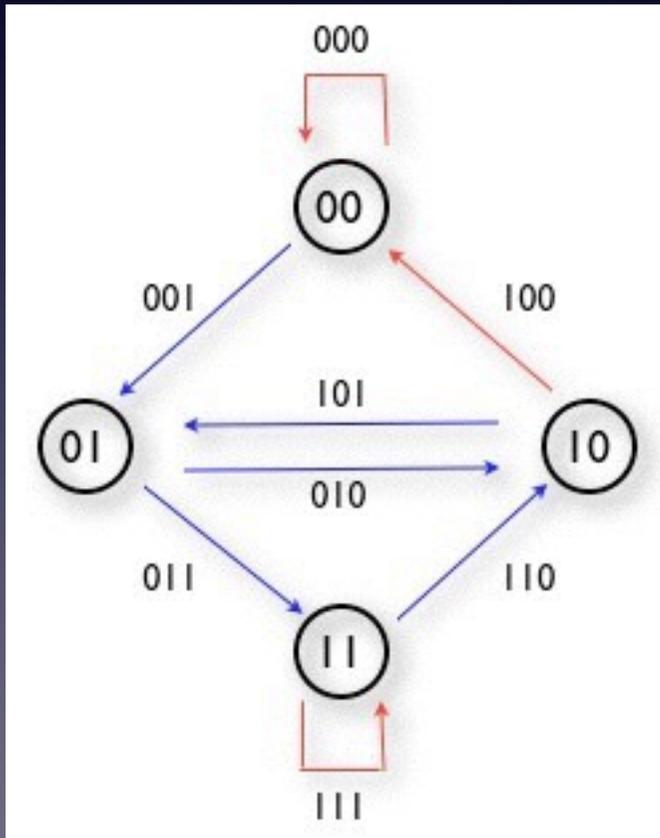
Los diagramas de "de Bruijn" es una gráfica que representa la regla de evolución.

Regla 110

111 → 0
110 → 1
101 → 1
100 → 0
011 → 1
010 → 1
001 → 1
000 → 0



Cálculo de preimágenes mediante diagramas "de Bruijn".



Matriz de preimágenes

	00	01	10	11
00	{ "000" }	{ "001" }	\emptyset	\emptyset
01	\emptyset	\emptyset	{ "010" }	{ "011" }
10	{ "100" }	{ "101" }	\emptyset	\emptyset
11	\emptyset	\emptyset	{ "110" }	{ "111" }

Matriz de preimágenes del estado 0

$$M_0 = \begin{pmatrix} \{ "000" \} & \emptyset & - & - \\ - & - & \emptyset & \emptyset \\ \{ "100" \} & \emptyset & - & - \\ - & - & \emptyset & \{ "111" \} \end{pmatrix}$$

Matriz de preimágenes del estado 1

$$M_1 = \begin{pmatrix} \emptyset & \{ "001" \} & - & - \\ - & - & \{ "010" \} & \{ "011" \} \\ \emptyset & \{ "101" \} & - & - \\ - & - & \{ "110" \} & \emptyset \end{pmatrix}$$

Operador sobre las matrices de preimágenes

$$C = A \odot B$$

$$c_{i,j} = \bigcup_{k=1}^n a_{ik} \otimes b_{kj}$$

Ejemplo:

$$M_{01} = M_0 \odot M_1$$

$$\begin{matrix} M_0 & & M_1 \\ \left(\begin{array}{cccc} \{\text{"000"}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{\text{"100"}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{\text{"111"}\} \end{array} \right) & \odot & \left(\begin{array}{cccc} \emptyset & \{\text{"001"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{"010"}\} & \{\text{"011"}\} \\ \emptyset & \{\text{"101"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{"110"}\} & \emptyset \end{array} \right) \end{matrix}$$

$$M_{01} \left(\begin{array}{cccc} \emptyset & \{\text{"0001"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{\text{"1001"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{"1110"}\} & \emptyset \end{array} \right)$$

Ejemplo:

$$M_{01} = M_0 \odot M_1$$

M_0

$$\begin{pmatrix} \{\text{"000"}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \{\text{"100"}\} & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \{\text{"111"}\} \end{pmatrix}$$

M_1

$$\begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{"001"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{"010"}\} & \{\text{"011"}\} \\ \emptyset & \{\text{"101"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{"110"}\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

$$M_{01} \begin{pmatrix} \emptyset & \{\text{"0001"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \{\text{"1001"}\} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{\text{"1110"}\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

Cálculo de preimágenes

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_w$$

$$M_{a_1 a_2 a_3 \dots a_k} = (((M_{a_1} \odot M_{a_2}) \odot M_{a_3}) \odot \dots) \odot M_{a_w}.$$

Ejemplo:

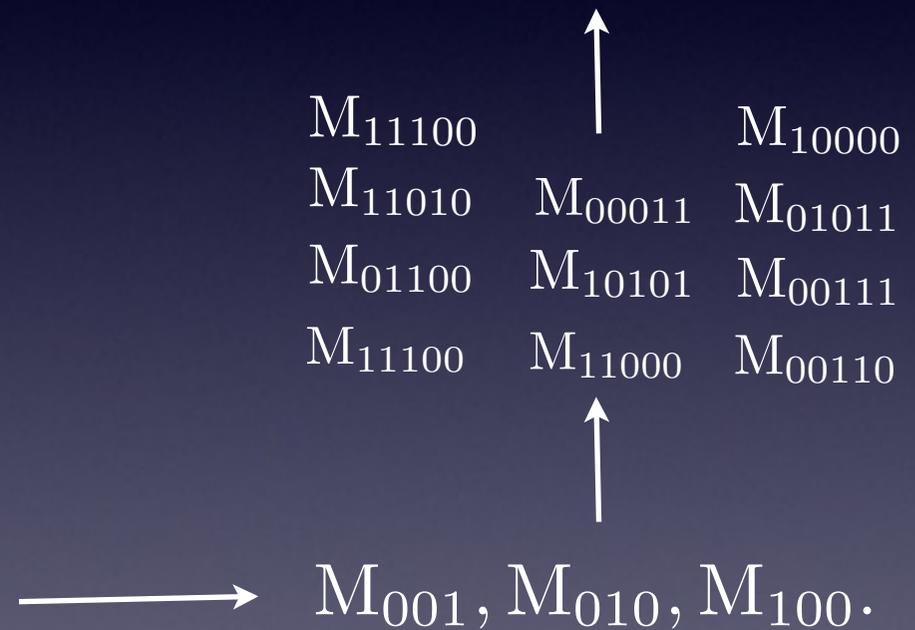
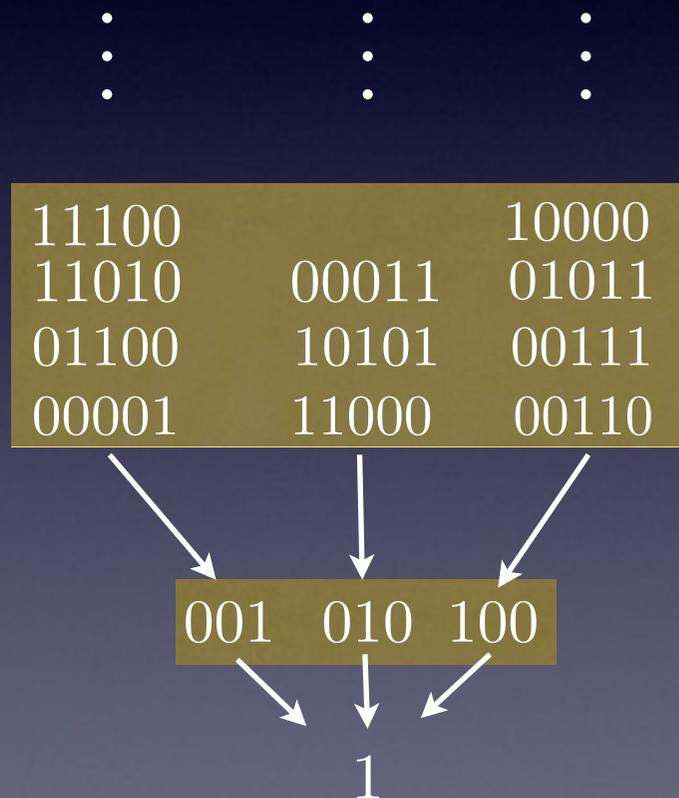
Preimágenes of “01001”

$$M_{01001} = (((M_0 \odot M_1) \odot M_0) \odot M_0) \odot M_1$$

$$M_{01001} = \begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \{“1110001”\} & \emptyset \end{pmatrix}$$

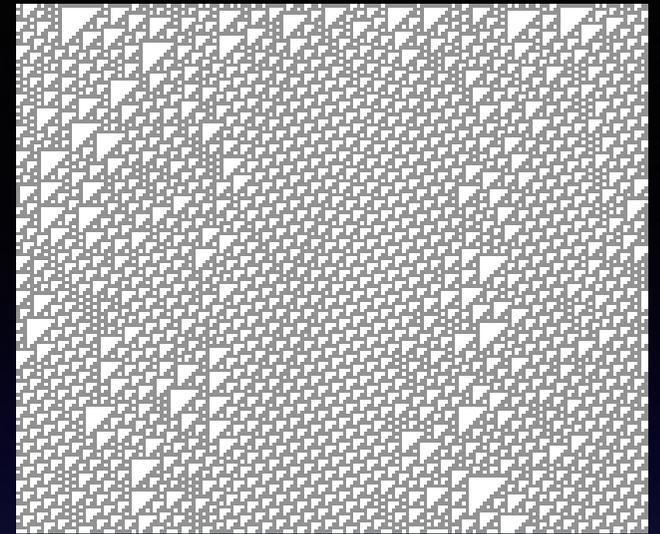
Una vez que sabemos como calcular preimágenes podemos
calcular los polinomios de densidad

Polinomios de densidad



Polinomios de densidad

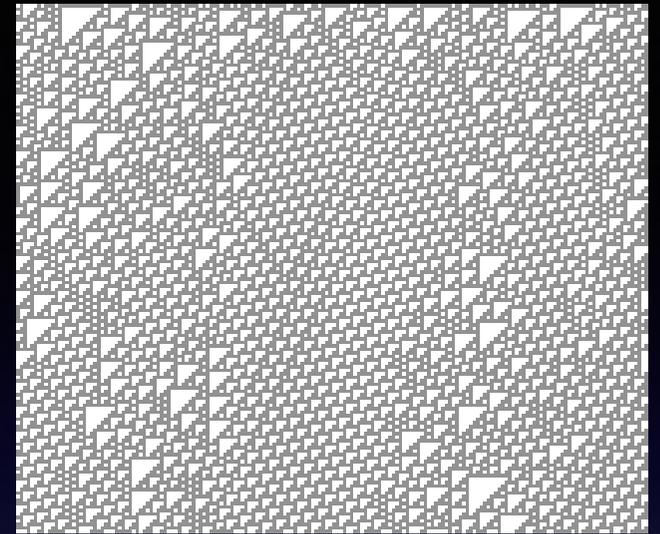
Rule 110



$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

Polinomios de densidad

Rule 110

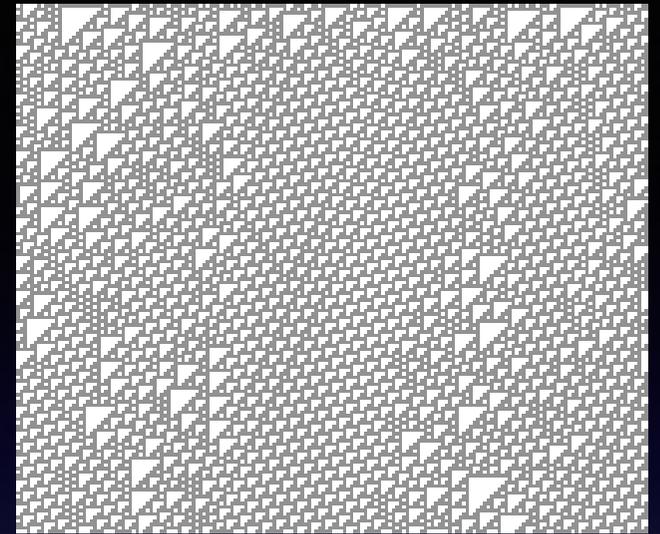


$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

Polinomios de densidad

Rule 110



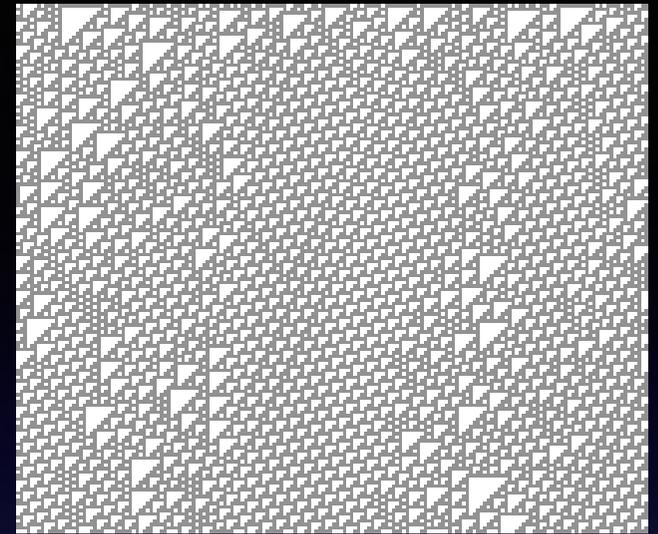
$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$(2) f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

Polinomios de densidad

Rule 110



$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

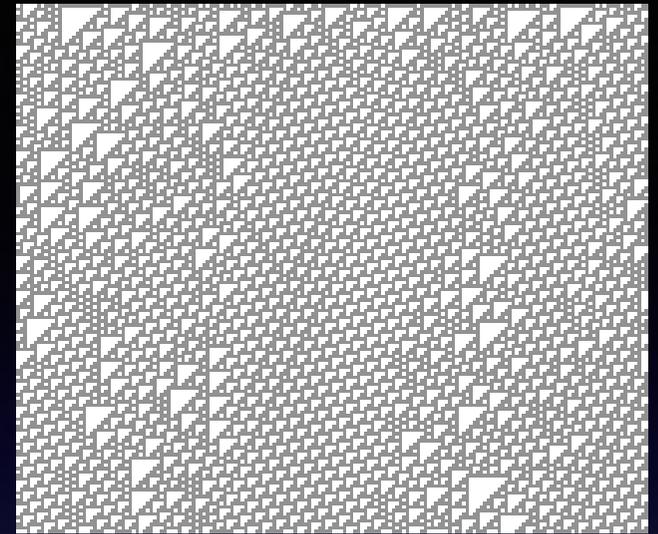
$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$(2) f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

$$(3) f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

Polinomios de densidad

Rule 110



$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

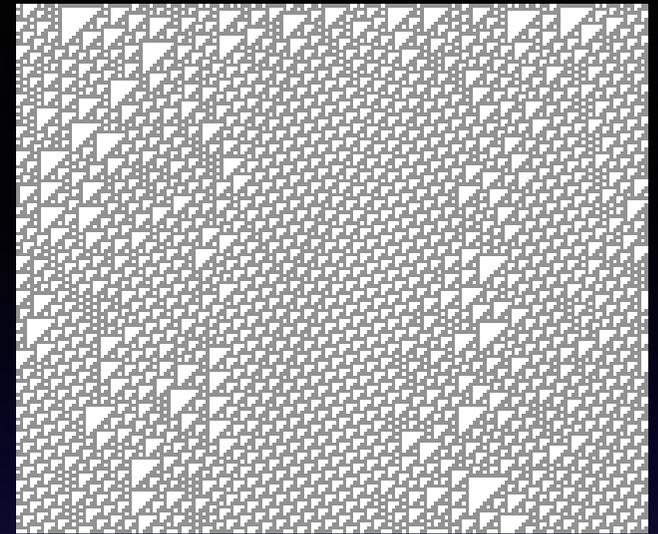
$$(2) f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

$$(3) f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

$$(4) f(p) = 3qp^8 + 20q^2p^7 + 45q^3p^6 + 64q^4p^5 + 67q^5p^4 + 48q^6p^3 + 22q^7p^2 + 5q^8p$$

Polinomios de densidad

Rule 110



$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$(2) f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

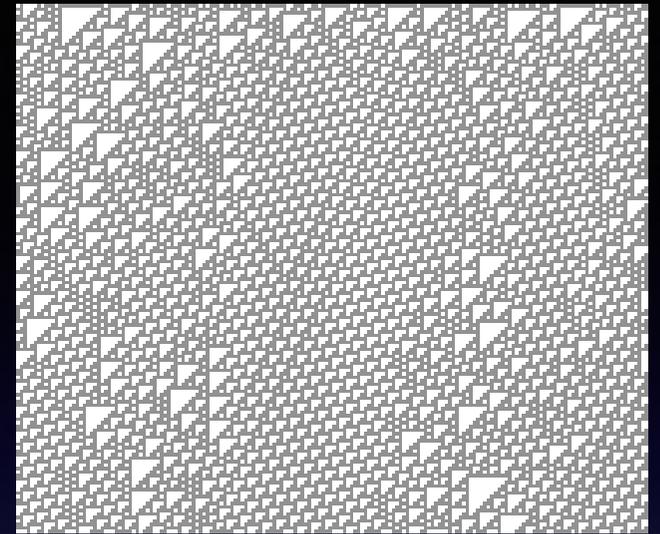
$$(3) f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

$$(4) f(p) = 3qp^8 + 20q^2p^7 + 45q^3p^6 + 64q^4p^5 + 67q^5p^4 + 48q^6p^3 + 22q^7p^2 + 5q^8p$$

$$(5) f(p) = 5qp^{10} + 33q^2p^9 + 94q^3p^8 + 165q^4p^7 + 216q^5p^6 + 233q^6p^5 + 188q^7p^4 + 95q^8p^3 + 26q^9p^2 + 3q^{10}p$$

Polinomios de densidad

Rule 110



$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$(2) f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

$$(3) f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

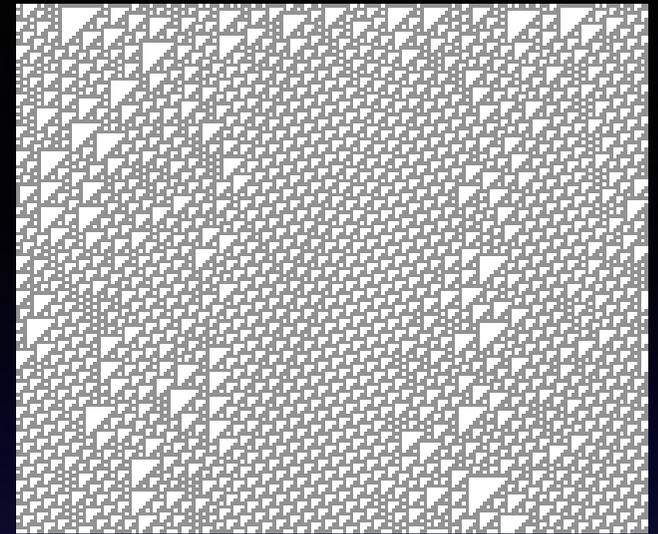
$$(4) f(p) = 3qp^8 + 20q^2p^7 + 45q^3p^6 + 64q^4p^5 + 67q^5p^4 + 48q^6p^3 + 22q^7p^2 + 5q^8p$$

$$(5) f(p) = 5qp^{10} + 33q^2p^9 + 94q^3p^8 + 165q^4p^7 + 216q^5p^6 + 233q^6p^5 + 188q^7p^4 + 95q^8p^3 + 26q^9p^2 + 3q^{10}p$$

$$(6) f(p) = 6qp^{12} + 44q^2p^{11} + 163q^3p^{10} + 388q^4p^9 + 670q^5p^8 + 899q^6p^7 + 929q^7p^6 + 710q^8p^5 + 394q^9p^4 + 156q^{10}p^3 + 40q^{11}p^2 + 5q^{12}p$$

Polinomios de densidad

Rule 110



$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$(2) f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

$$(3) f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

$$(4) f(p) = 3qp^8 + 20q^2p^7 + 45q^3p^6 + 64q^4p^5 + 67q^5p^4 + 48q^6p^3 + 22q^7p^2 + 5q^8p$$

$$(5) f(p) = 5qp^{10} + 33q^2p^9 + 94q^3p^8 + 165q^4p^7 + 216q^5p^6 + 233q^6p^5 + 188q^7p^4 + 95q^8p^3 + 26q^9p^2 + 3q^{10}p$$

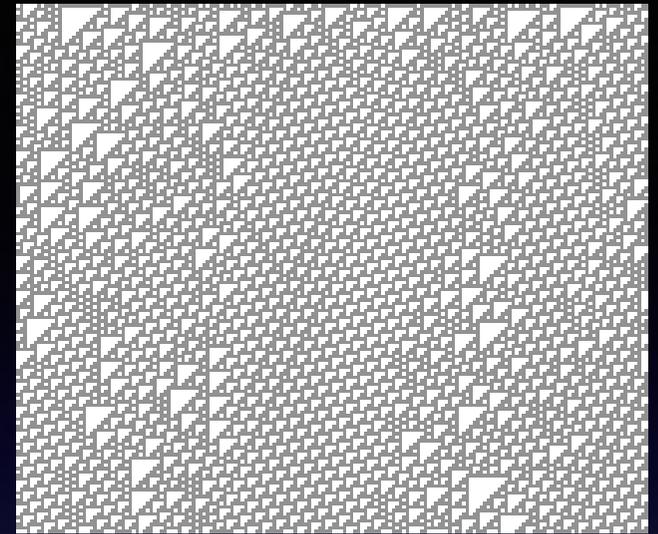
$$(6) f(p) = 6qp^{12} + 44q^2p^{11} + 163q^3p^{10} + 388q^4p^9 + 670q^5p^8 + 899q^6p^7 + 929q^7p^6 + 710q^8p^5 + 394q^9p^4 + 156q^{10}p^3 + 40q^{11}p^2 + 5q^{12}p$$

⋮

¿Cuándo detenerse?

Polinomios de densidad

Rule 110



$\varphi : \{111 \rightarrow 0, 110 \rightarrow 1, 101 \rightarrow 1, 100 \rightarrow 0, 011 \rightarrow 1, 010 \rightarrow 1, 001 \rightarrow 1, 000 \rightarrow 0\}$

$$(1) f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$(2) f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

$$(3) f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

$$(4) f(p) = 3qp^8 + 20q^2p^7 + 45q^3p^6 + 64q^4p^5 + 67q^5p^4 + 48q^6p^3 + 22q^7p^2 + 5q^8p$$

$$(5) f(p) = 5qp^{10} + 33q^2p^9 + 94q^3p^8 + 165q^4p^7 + 216q^5p^6 + 233q^6p^5 + 188q^7p^4 + 95q^8p^3 + 26q^9p^2 + 3q^{10}p$$

$$(6) f(p) = 6qp^{12} + 44q^2p^{11} + 163q^3p^{10} + 388q^4p^9 + 670q^5p^8 + 899q^6p^7 + 929q^7p^6 + 710q^8p^5 + 394q^9p^4 + 156q^{10}p^3 + 40q^{11}p^2 + 5q^{12}p$$

⋮

¿Qué polinomio caracteriza el comportamiento?

Convergencia en los Polinomios de Densidad

Criterio de convergencia

$$\left| \int_0^1 p^t(\mathbf{x}) - \int_0^1 p^{t+i}(\mathbf{x}) \right| < \epsilon$$

para $i \geq 1$.

Polinomios de Bernstein

$$B_{i,n} = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$$

para $i = 0, 1, \dots, n$.

Con $B_{i,n} = 0$ si $i < 0$, $i > n$.

Propiedades de los Polinomios de Bernstein

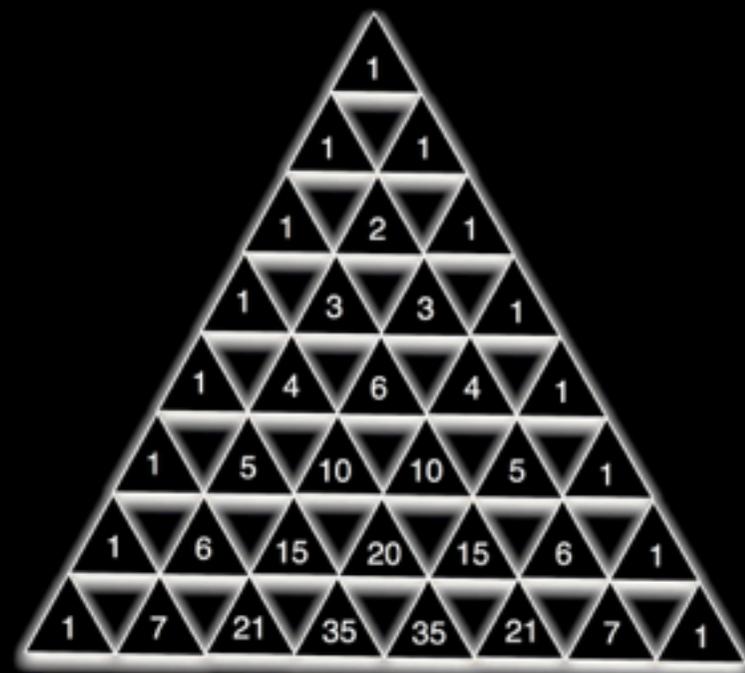
$$1) \quad \sum_{i=0}^k B_{i,n}(p) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{i,n-1}(p)$$

$$2) \quad \sum_{i=0}^n B_{i,n}(p) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{i,n-1}(p) = \sum_{i=0}^{n-2} B_{i,n-2}(p) = \dots$$
$$= \sum_{i=0}^1 B_{i,1}(p) = (1-p) + p = 1.$$

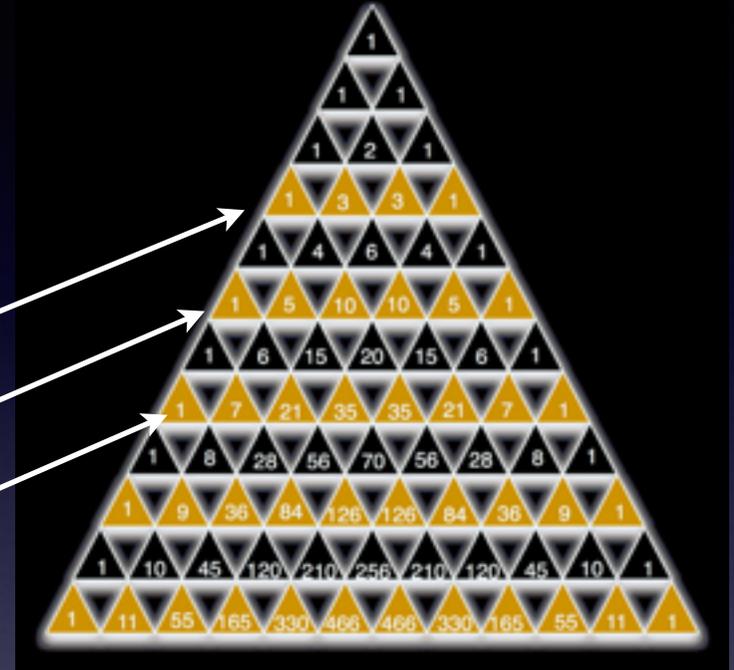
Polinomios de Bernstein

Los binomiales de los polinomios son los coeficientes del triángulo de Pascal.

$$\begin{array}{l} n \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ q + p \\ q^2 + 2qp + p^2 \\ q^3 + 3q^2p + 3qp^2 + p^3 \\ q^4 + 3q^3p + 6q^2p^2 + 4qp^3 + p^4 \\ q^5 + 5q^4p + 10q^3p^2 + 10q^2p^3 + 5qp^4 + p^5 \\ q^6 + 6q^5p + 15q^4p^2 + 20q^3p^3 + 15q^2p^4 + 6qp^5 + p^6 \\ q^7 + 7q^6p + 21q^5p^2 + 35q^4p^3 + 35q^3p^4 + 21q^2p^5 + 7qp^6 + p^7 \end{array}$$



Los polinomios de densidad estan inmersos en los polinomios de Bernstein



$$f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

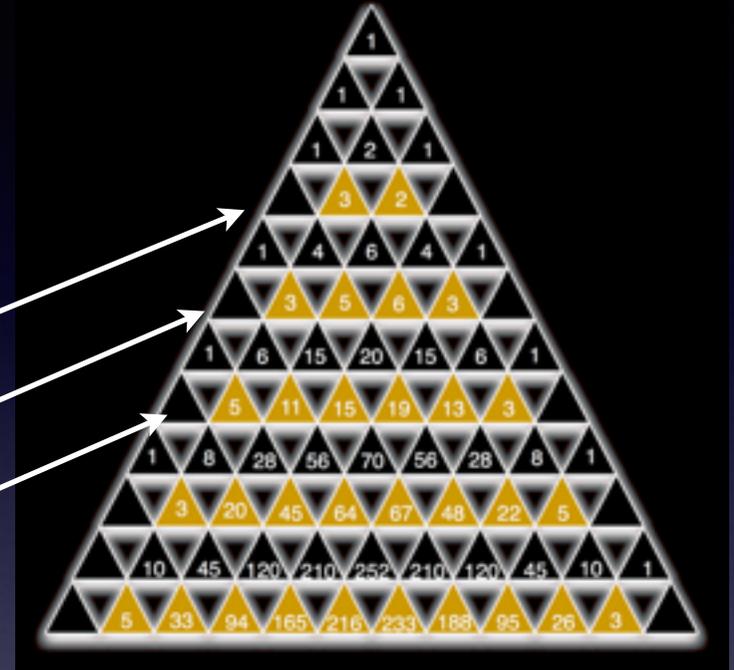
$$f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

$$f(p) = 3qp^8 + 20q^2p^7 + 45q^3p^6 + 64q^4p^5 + 67q^5p^4 + 48q^6p^3 + 22q^7p^2 + 5q^8p$$

$$f(p) = 5qp^{10} + 33q^2p^9 + 94q^3p^8 + 165q^4p^7 + 216q^5p^6 + 233q^6p^5 + 188q^7p^4 + 95q^8p^3 + 26q^9p^2 + 3q^{10}p$$

$$f(p) = 6qp^{12} + 44q^2p^{11} + 163q^3p^{10} + 388q^4p^9 + 670q^5p^8 + 899q^6p^7 + 929q^7p^6 + 710q^8p^5 + 394q^9p^4 + 156q^{10}p^3 + 40q^{11}p^2 + 5q^{12}p$$

Los polinomios de densidad estan inmersos en los polinomios de Bernstein



$$f(p) = 3qp^2 + 2q^2p$$

$$f(p) = 3qp^4 + 5q^2p^3 + 6q^3p^2 + 3q^4p$$

$$f(p) = 5qp^6 + 11q^2p^5 + 15q^3p^4 + 19q^4p^3 + 13q^5p^2 + 3q^6p$$

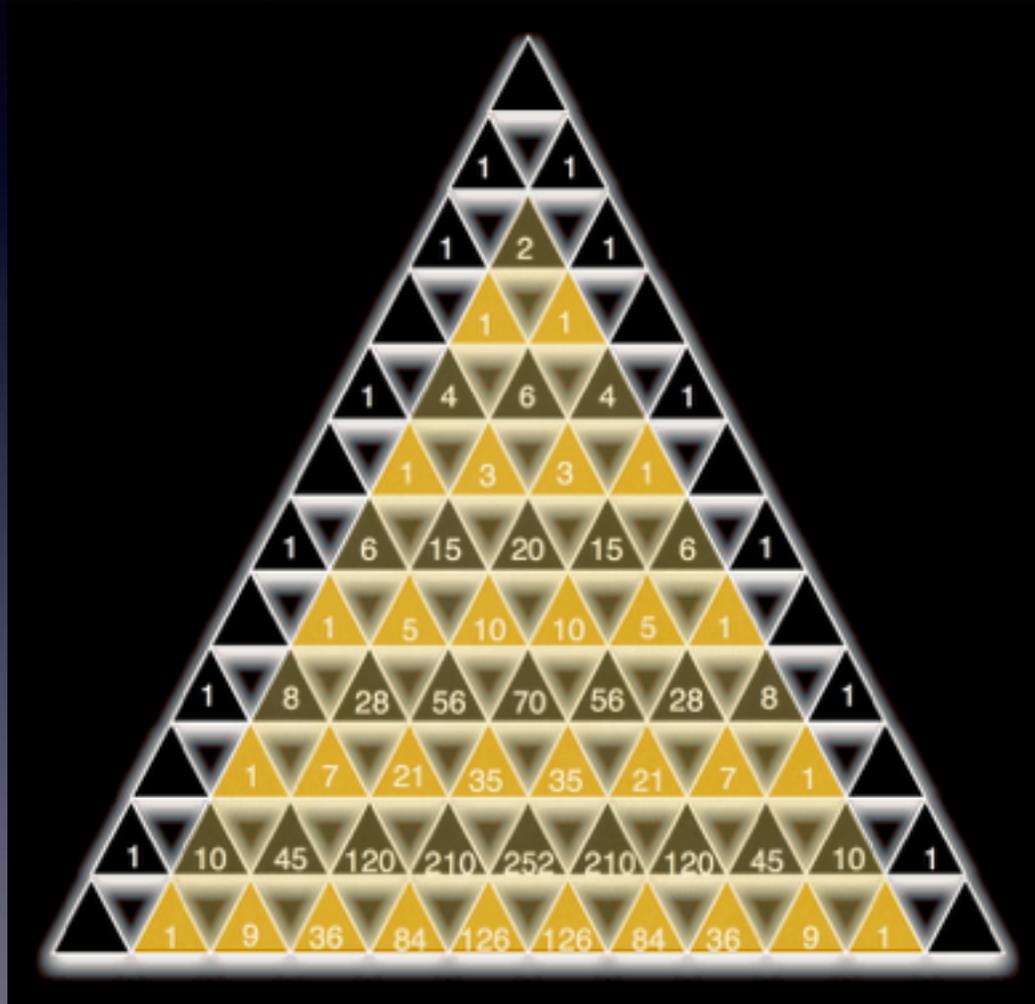
$$f(p) = 3qp^8 + 20q^2p^7 + 45q^3p^6 + 64q^4p^5 + 67q^5p^4 + 48q^6p^3 + 22q^7p^2 + 5q^8p$$

$$f(p) = 5qp^{10} + 33q^2p^9 + 94q^3p^8 + 165q^4p^7 + 216q^5p^6 + 233q^6p^5 + 188q^7p^4 + 95q^8p^3 + 26q^9p^2 + 3q^{10}p$$

$$f(p) = 6qp^{12} + 44q^2p^{11} + 163q^3p^{10} + 388q^4p^9 + 670q^5p^8 + 899q^6p^7 + 929q^7p^6 + 710q^8p^5 + 394q^9p^4 + 156q^{10}p^3 + 40q^{11}p^2 + 5q^{12}p$$

Convergencia $\triangle I$

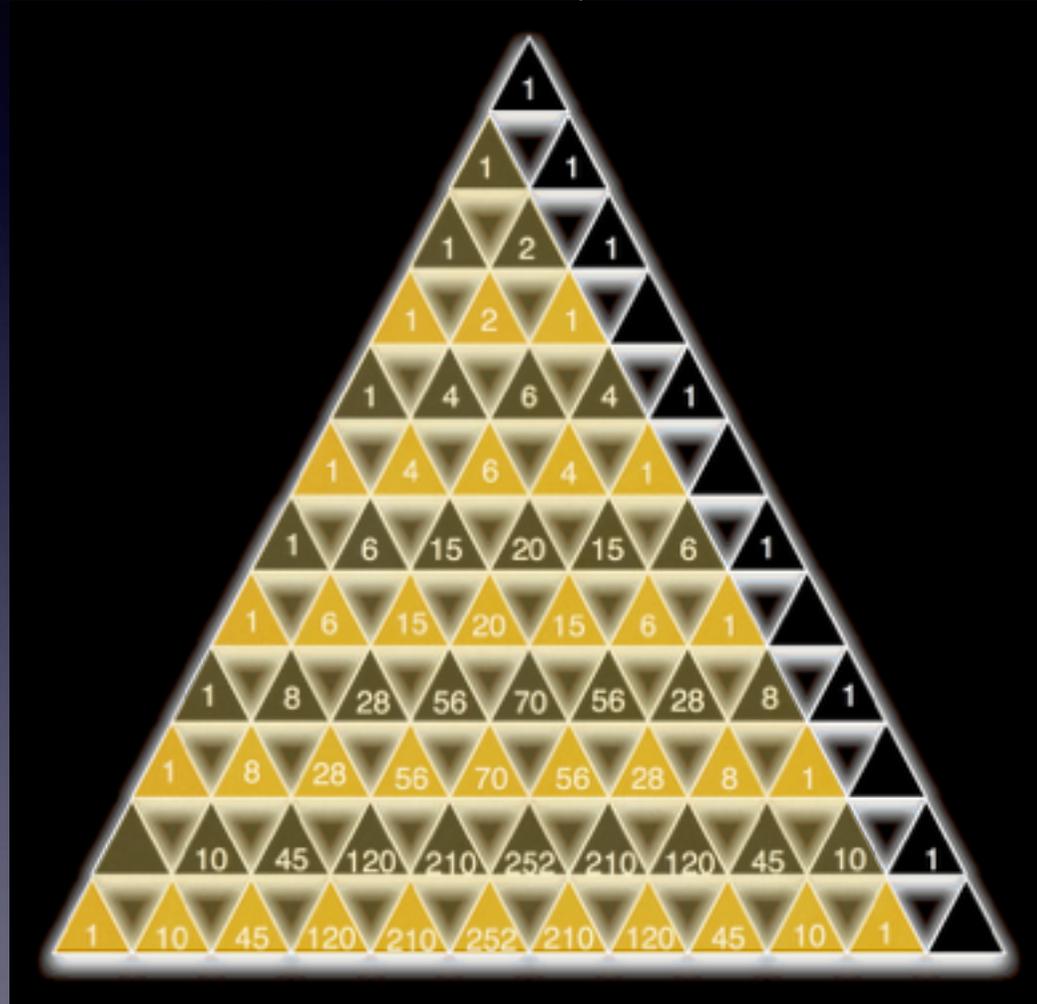
10, 12 y 34



$$p = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\binom{n-2}{r-1}}{\binom{n}{r}} \right] = 0.5$$

Convergencia $\triangle II$

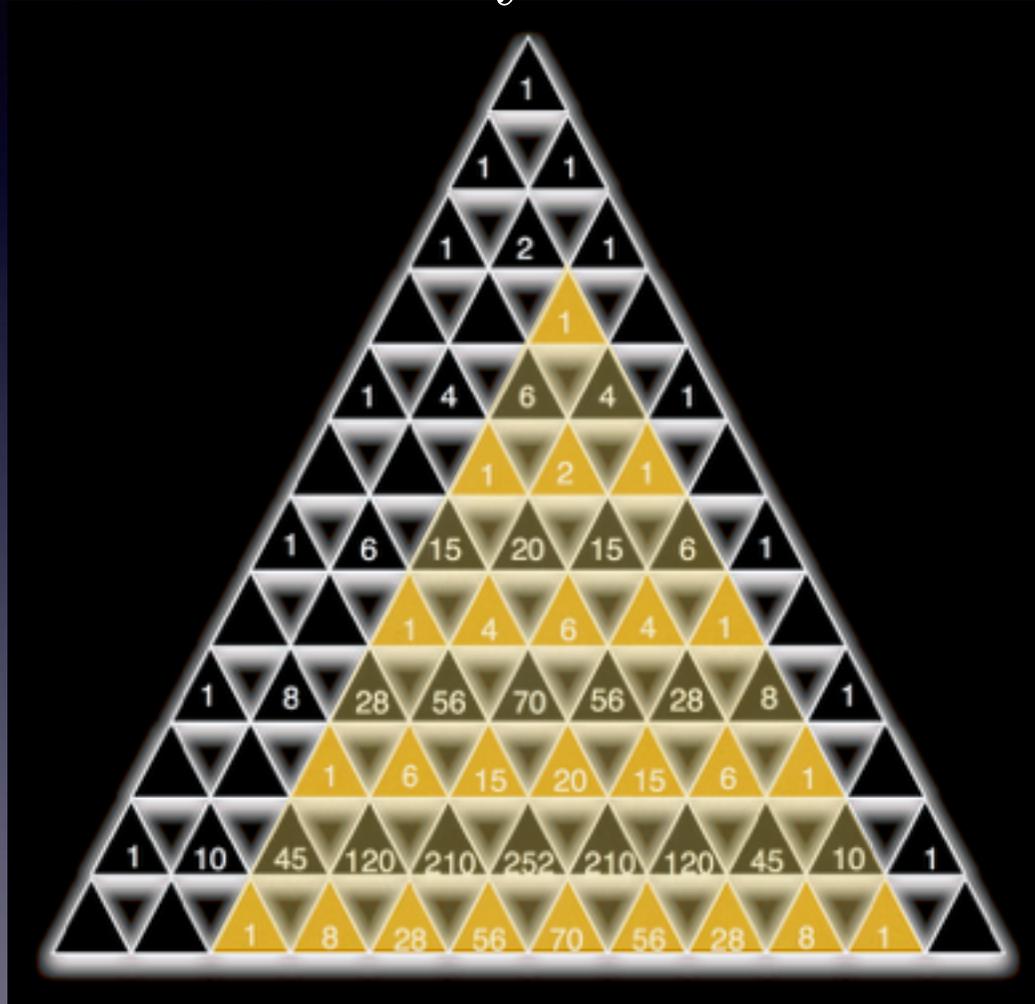
170, 184 y 204.



$$p = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{r}}{\binom{n}{r}} \right] = 0.166$$

Convergencia $\triangle III$

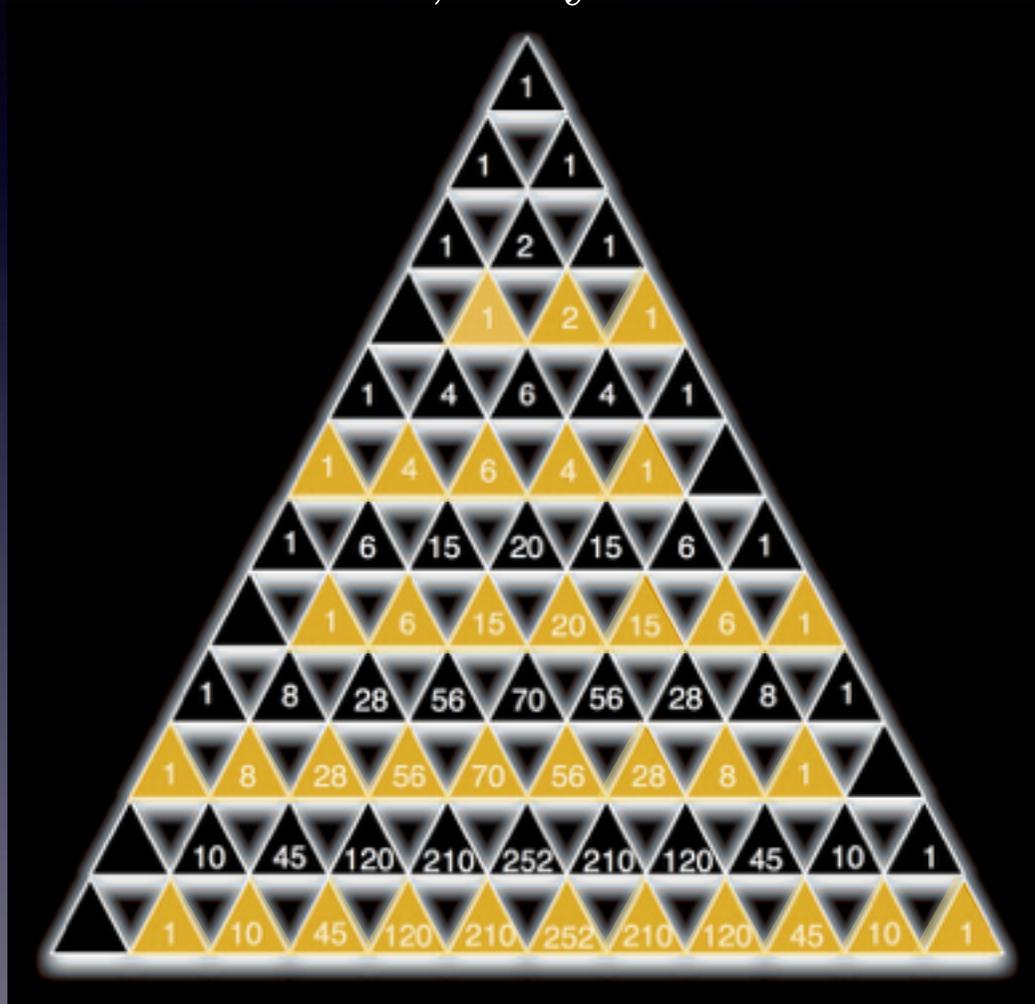
2 y 4.



$$p = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=2}^{n-1} \frac{\binom{n-3}{r-2}}{\binom{n}{r}} \right] = 0.083$$

Convergencia ΔVI

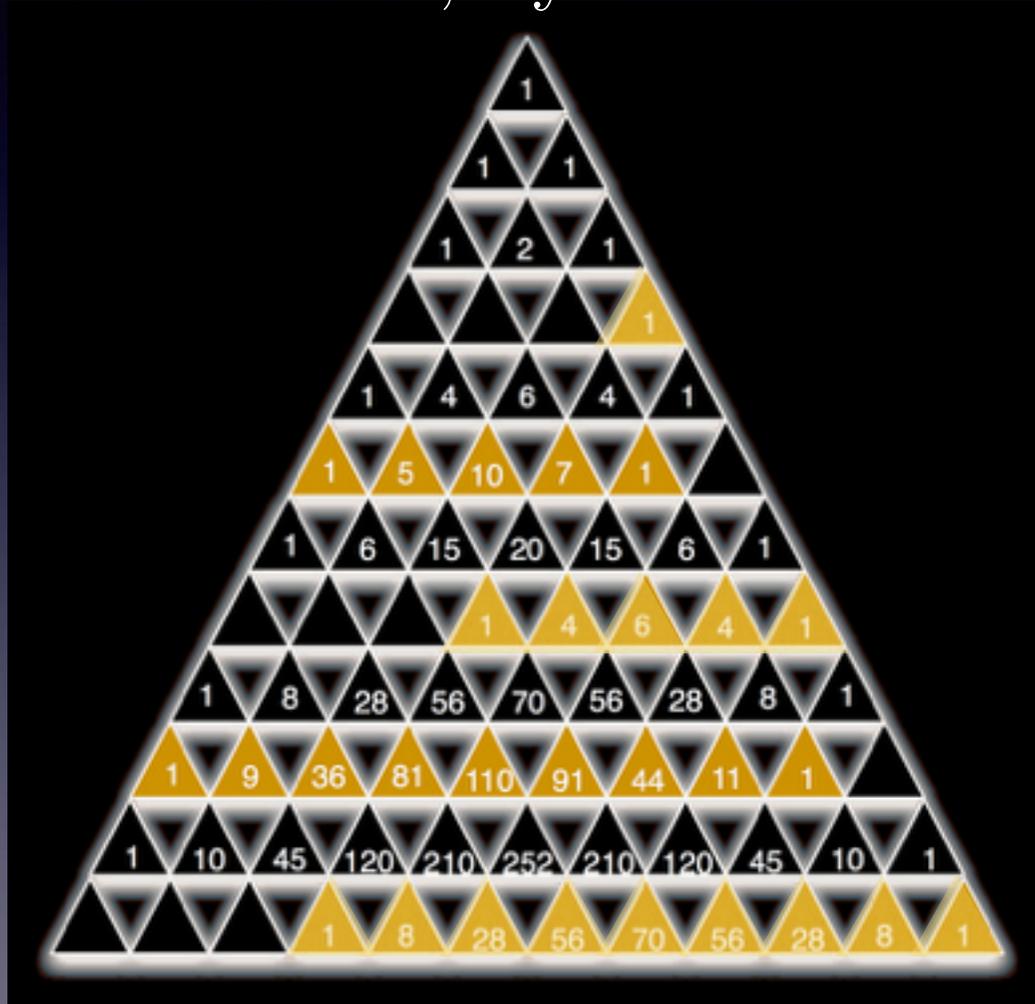
15, 29 y 51.



$$p = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{r}}{\binom{n}{r}} \right] = 0.5$$

Convergencia ΔV

1, 3 y 5.



$$p = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{r} + \binom{n-3}{r-1}}{\binom{n}{r}} \right] = 0.583$$

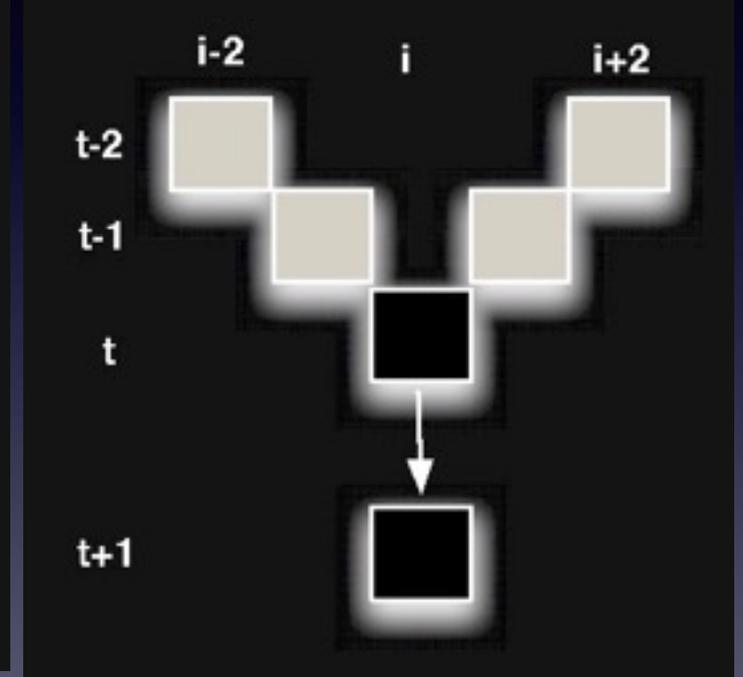
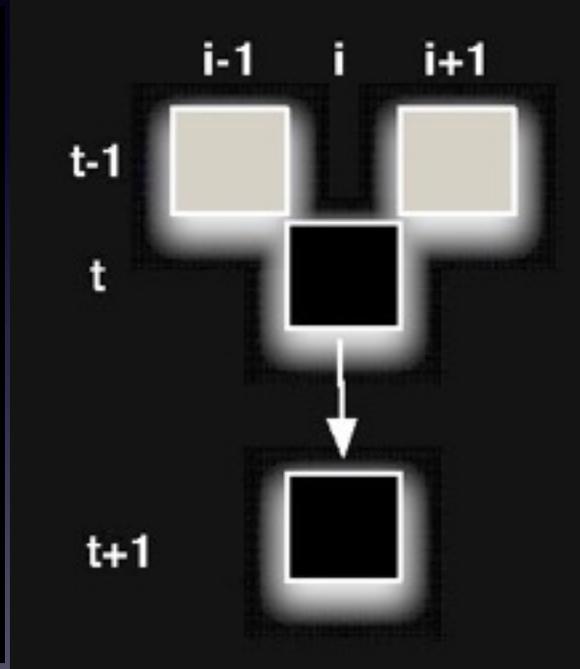
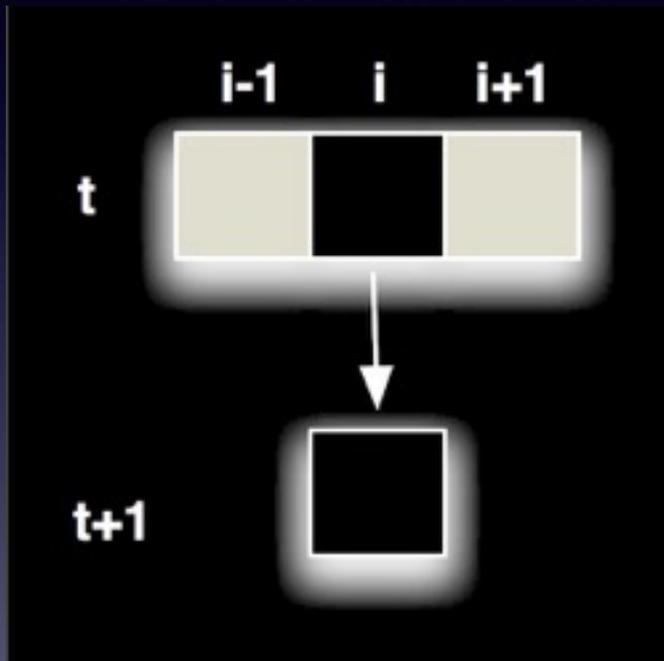
AC con retardos

$$\sigma_i^{t+1} = \phi(\sigma_{i-r}^{t-r-1}, \sigma_{i-r+1}^{t-1}, \dots, \sigma_i^t, \dots, \sigma_{i+r-1}^{t-r}, \sigma_{i+r}^{t-r-1})$$

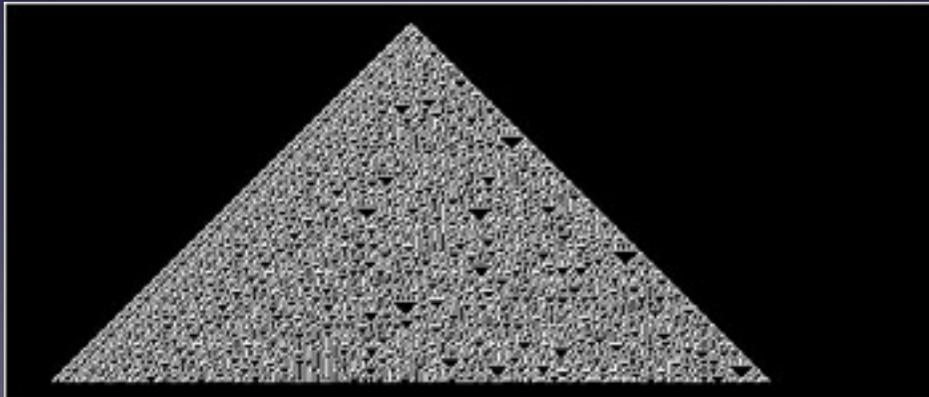
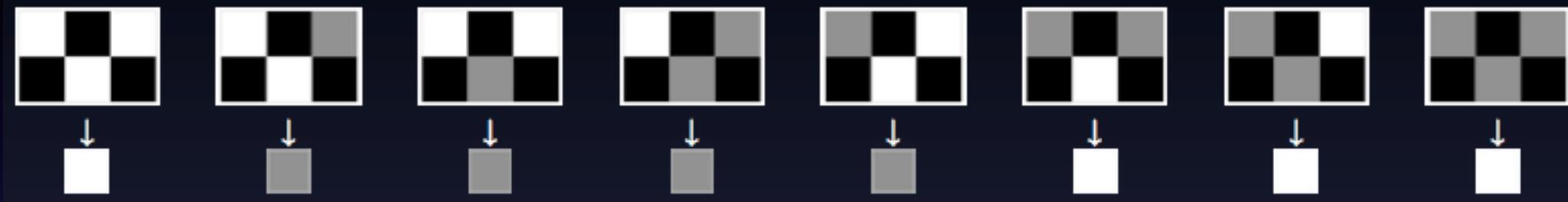
Dr. Jörg Noack.
Max Plank Institute, Leipzig

Dr. Thimo Rohlf
Santa Fe Institute, EU.

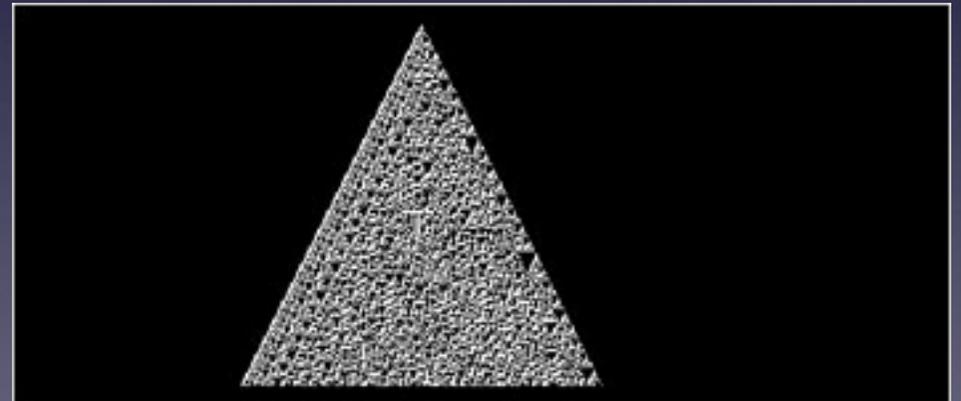
AC con retardos



Regla 30

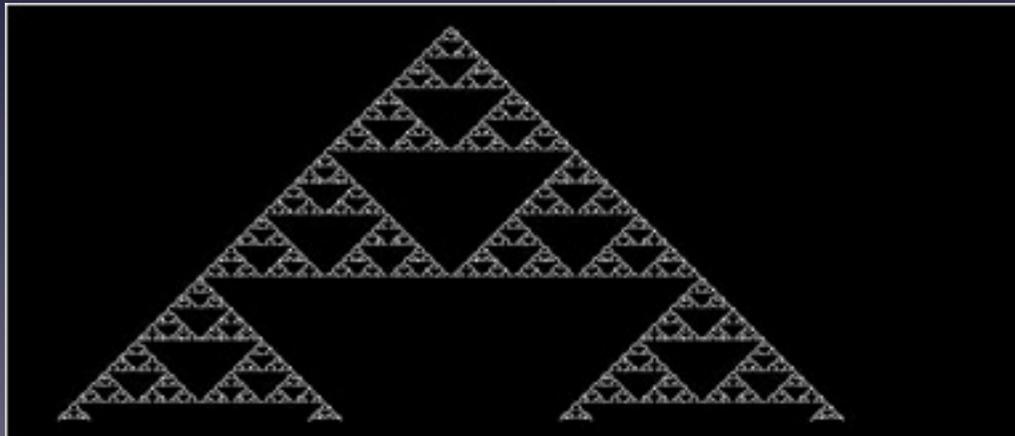


AC Convencional



AC con Retardo $t - 1$

Regla 90

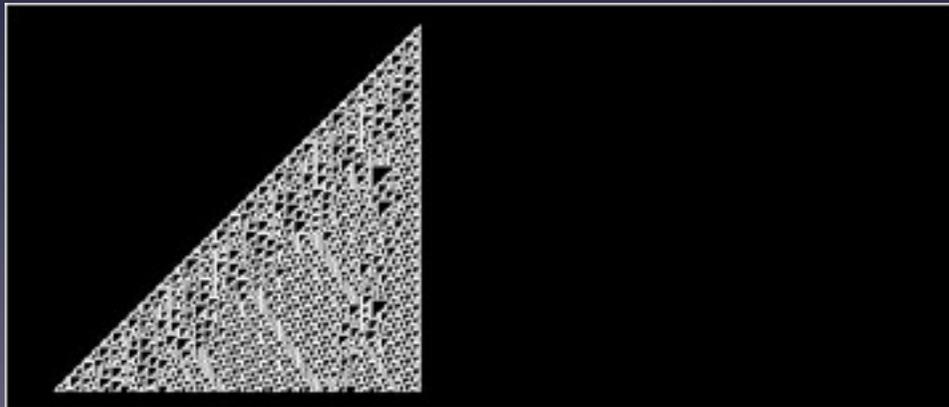


AC Convencional

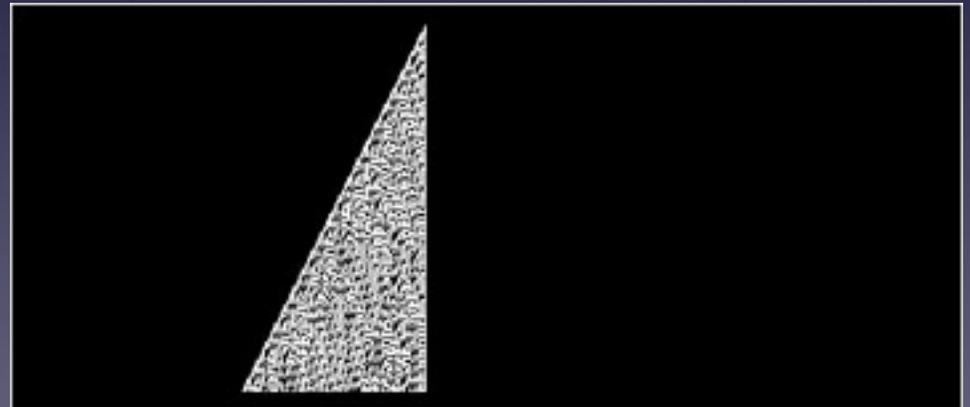


AC con Retardo $t - 1$

Regla 110



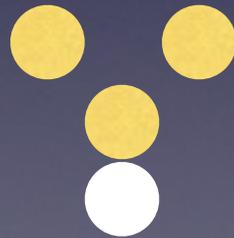
AC Convencional



AC con Retardo $t - 1$

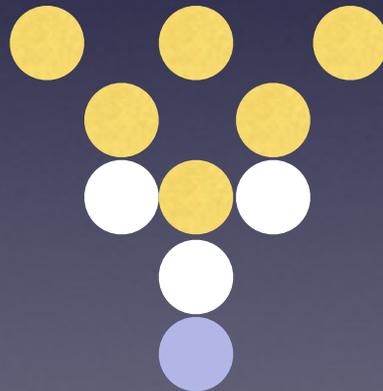
Preimágenes en AC con retardos

Gen: 0



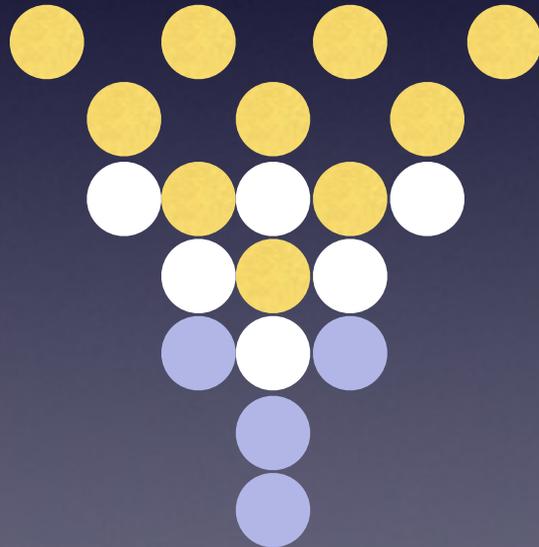
preimágenes en AC con retardos

Gen: I



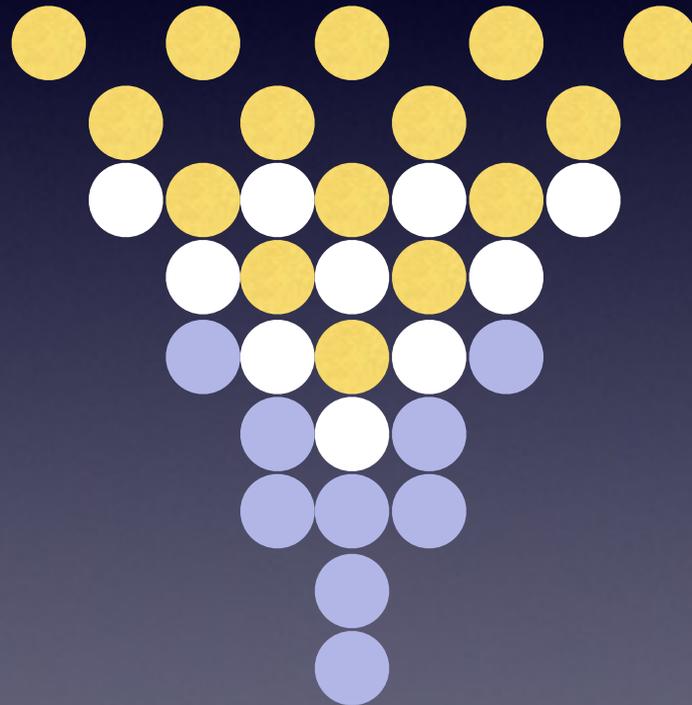
Preimágenes en AC con retardos

Gen: 2



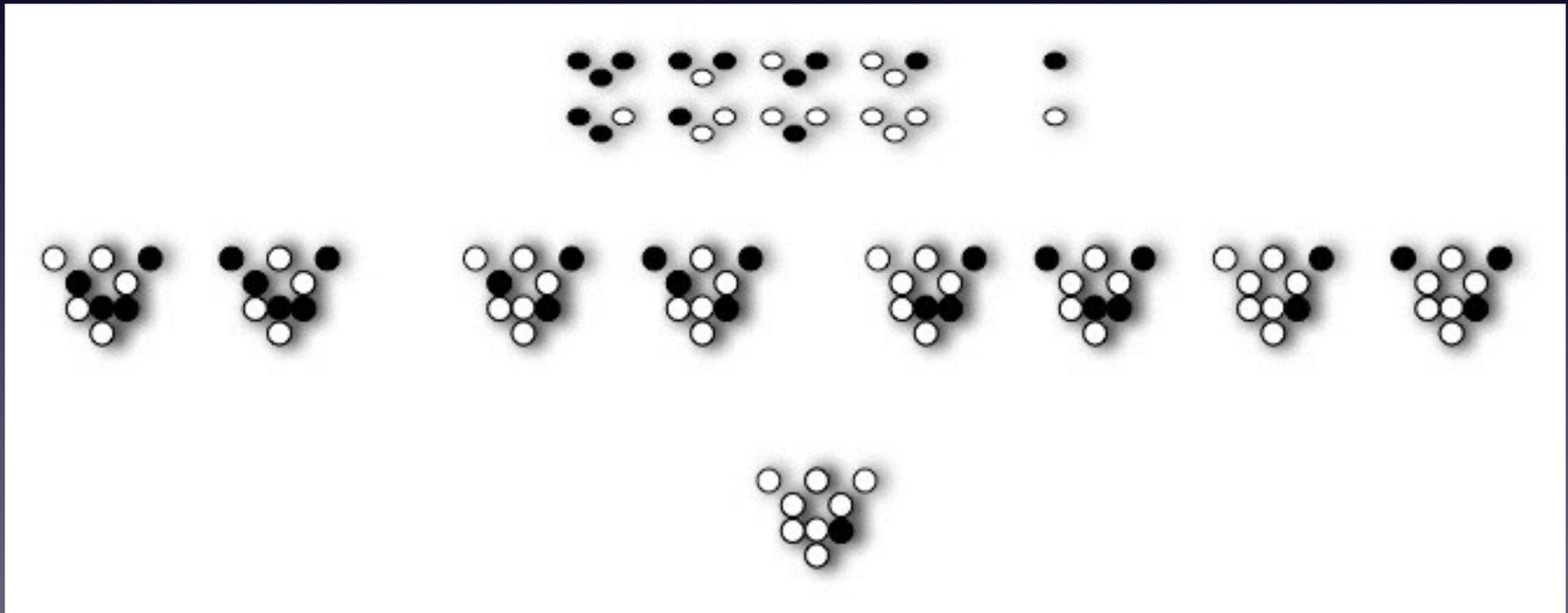
Preimágenes en AC con retardos

Gen: 3



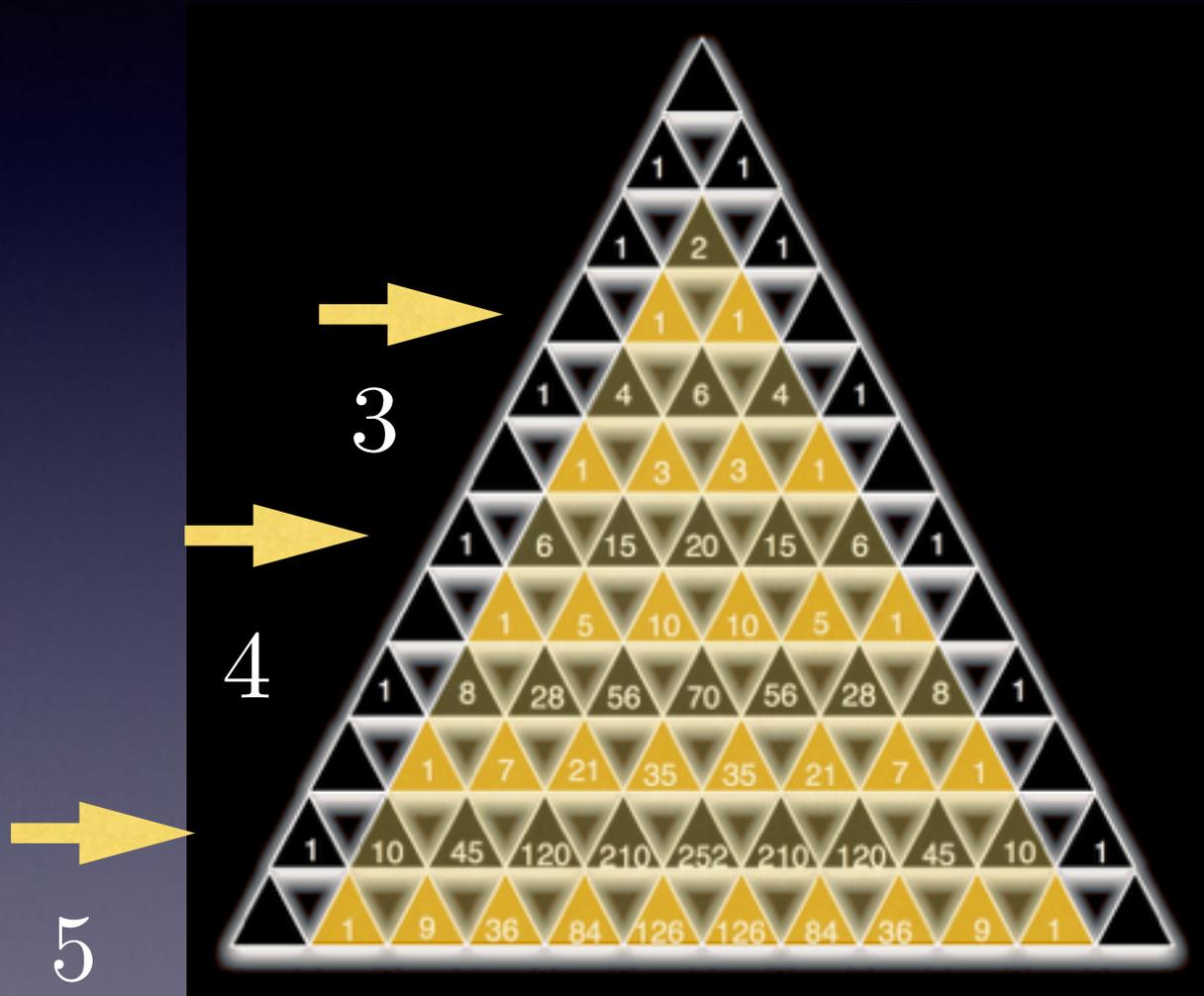
Preimágenes en AC con retardos

Regla 170



Convergencia $\triangle I$

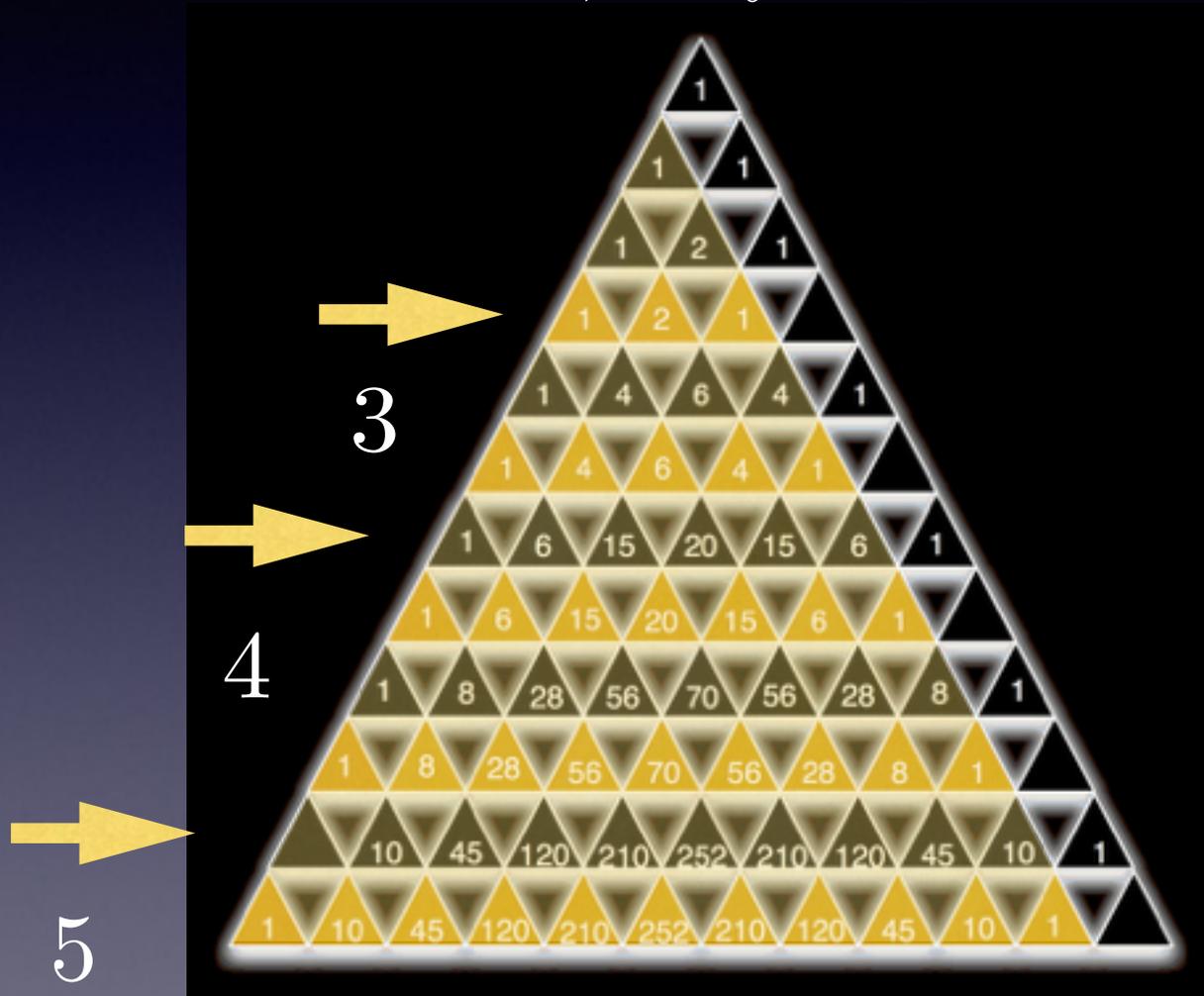
10, 12 y 34



$$p = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\binom{n-2}{r-1}}{\binom{n}{r}} \right] = 0.5$$

Convergencia $\triangle II$

170, 184 y 204.



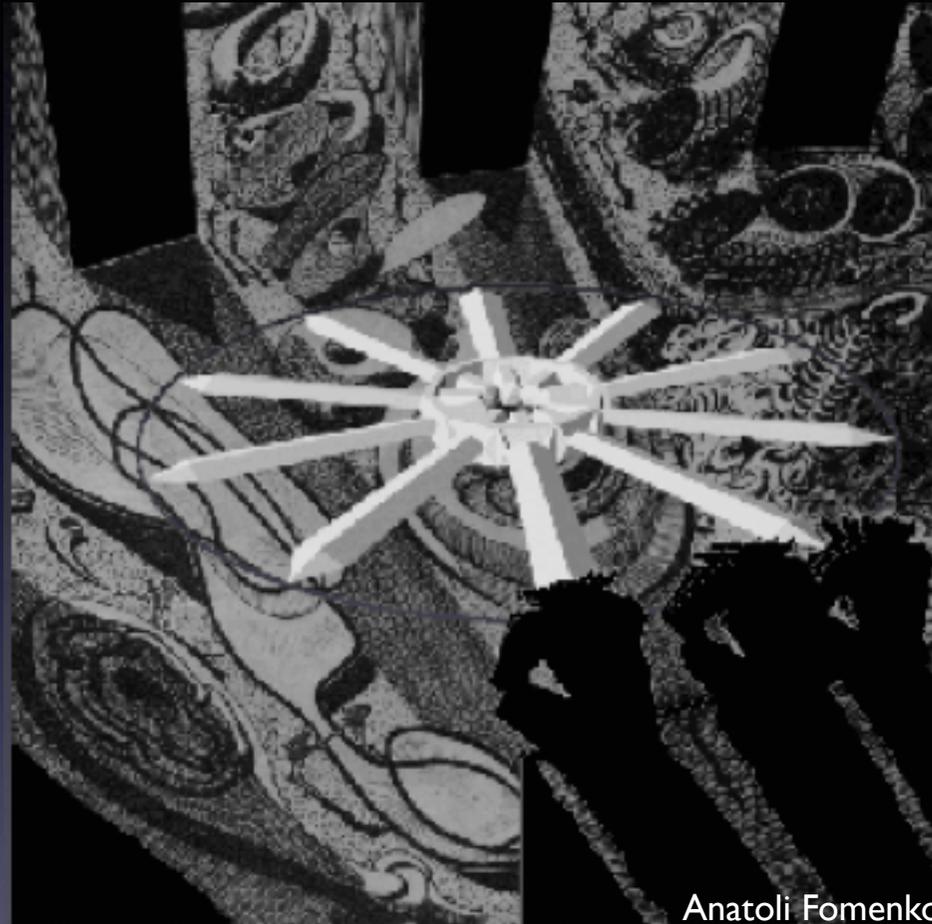
$$p = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \frac{\binom{n-1}{r}}{\binom{n}{r}} \right] = 0.166$$

Conclusiones

- La evolución de los AC con retardo tiende a alargarse pero converge a la misma densidad que los AC convencionales

Trabajos futuros

- ¿El hecho de que AC con retardo y convencionales implica que las propiedades de los AC convencionales se mantienen pero en otro ciclo de tiempo? Es decir la regla 110 hace computación universal en los AC con retardo pero en un desfase de $t - 1$?
- ¿Se cumple esto para cualquier retardo?
- ¿Se pueden considerar los AC con retardo AC fractales?



Gracias

Contacto



José Manuel Gómez Soto
Posgrado e Investigación
Universidad la Salle
México

www.ci.ulsa.mx/~jmgomez
jmgomezgoo@gmail.com

<http://cellular.ci.ulsa.mx/>

preimágenes en AC con retardos

