Análisis Real

Maestría

Descripción y justificación: La intención del curso de análisis real es que el alumno conozca y comprenda algunos temas tradicionales del análisis real que le sirvan para continuar después con el estudio del análisis funcional, ecuaciones diferenciales, probabilidad u otras áreas. Además el curso sirve de ejemplo de como es que se generalizan teorías en las matemáticas, lo que es útil para saber lo que es el trabajo matemático.

Objetivos generales: Que el alumno comprenda el concepto de completitud y convergencia de funciones. Además que el alumno comprenda la teoría de la medida y la construcción de la integral de Lebesgue. Además que el alumno entienda que la medida de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann.

BLOQUE I: Sucesiones en espacios métricos.

Objetivos particulares: Que el alumno comprenda lo que es la convergencia de una sucesión en espacios métricos, en particular en $\mathbb{R}$ y espacios normados, poniendo especial atención en los espacios de funciones. Además el alumno entenderá lo que es la completitud de los espacios métricos y su importancia en el análisis.

1. La recta real. Ínfimos y supremos de los conjuntos. Límites inferiores y límites superiores de las sucesiones. La recta extendida.
2. Espacios métricos. Conjuntos abiertos, cerrados y densos. Cerraduras de conjuntos. Bolas abiertas y cerradas en espacios métricos. Aplicaciones continuas y uniformemente continuas. Sucesiones convergentes.
3. Las sucesiones de Cauchy en los espacios métricos. Espacios métricos completos. La completación de un espacio métrico. Espacios métricos completamente acotados.
4. Teorema de Baire.
5. Espacios normados. Espacios de Banach. Las normas equivalentes en los espacios euclideanos. La completitud de los espacios euclideanos.
6. Espacios de las funciones, la convergencia uniforme y la convergencia puntual. Teorema de Stone-Weiersstrass y de Arzela-Ascoli. La completitud de los espacios normados clásicos. Ejemplos de los espacios normados no completos.
7. Espacios métricos compactos. La continuidad uniforme de las funciones continuas sobre los espacios compactos. Las bolas cerradas en los espacios de Banach dimensionalmente infinitos no son compactas (ejemplos).

BLOQUE II: Teoría de la medida e Integral de Lebesgue.

Objetivos particulares: Que el alumno comprenda lo que es una medida. Además que el alumno entienda la construcción de la integral de Lebesgue, así como que teoremas clásicos de la teoría de la integral de Lebesgue se pueden obtener con la teoría de la integral de Lebesgue. El alumno podrá calcular integrales de Lebesgue.

1. Los espacios de medida y σ-algebras. Conjuntos borelianos en los espacios topológicos.
2. La construcción de Carathéodory. La medida de Lebesgue en la recta real.
3. Las aplicaciones medibles.

4. La definición de la integral. Funciones integrables. Los teoremas de convergencia.
5. Aplicaciones de los teorema de convergencia: cambio de variable, equivalencia entre la integral de Riemann y de Lebesgue, diferenciación bajo el signo de integracin.
6. Medidas producto. Teorema de Fubini.
7. Derivación e integración. Teorema de Vitali en la recta real. Funciones de variación acotada. Funciones absolutamente continuas. Teorema fundamental de cálculo para la integral de Lebesgue.

Bibliografía:

- Bartle R.G, The elements of integration and Lebesgue measure, The Wiley Classics Library, 1995.
- Fremlin D. H. Measure theory, Torres Fremlin, vol. 1 (2011) y vol. 2 (2010).
- Royden, H.L., Real analysis, Macmillan, 3^a edición, 1988.
- Villa Morales J., Introducción a la medida e integración, UAA, Textos Universitarios, 2005.