Curso Propedéutico

MAESTRÍA PROFESIONALIZANTE EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

GUIA DE EJERCICIOS NIVEL SUPERIOR CÁLCULO DIFERENCIA E INTEGRAL

ELABORADO:EDUARDO CARLOS BRICEÑO SOLIS

DARLY ALINA KU EUAN

CÁLCULO
GUÍA DE EJERCICOS
MAESTRÍA PROFESIONALIZANTE EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

Esta guía contiene actividades de análisis del comportamiento variacional de las funciones, así como el estudio de sus gráficas y problemas de aplicación mediante el uso de conceptos del cálculo diferencia e integral.

Objetivo de sección: Analizar el comportamiento de las funciones por medio del análisis variacional en representaciones gráficas y analíticas

CONTENIDO

En estas sesiones contiene actividades del estudio de las funciones donde se requiere el análisis variacional mediante conceptos del cálculo diferencial e integral.
La estructura de los ejercicios está en orden de dificultad.
Se puede usar en el análisis, el uso de cualquier software graficador

Sección I. En esta sección consiste en resolver algunos ejercicios en el cual consideramos, prácticos, para la resolución de problemas. También se considera importante recordar algunas definiciones.

A I.1. Defina cada uno de los conceptos y mencione alguna de las aplicaciones que pueda tener.

1. Función
2. Límite
3. Derivada
4. Integral definida

A I.2. Explique la diferencia entre integral definida y antiderivada.

A I.3. Según el teorema fundamental del cálculo sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ por:

$$F=\int_a^x f(t)dt$$

Entonces se cumple que:

a) F *es continua en* $[a,b]$
b) *En todo punto* c *de* $[a,b]$ *en el que* f *sea continua se verifica que* F *es derivable en dicho punto siendo F´(c)=f(c)*
c) *Ambas*
d) *Ninguna de las dos*

2.2. Contesta falso o verdadero. *Si una función f es continua en $[a,b]$ entonces ¿f es integrable en $[a,b]$?*

AI.4. Dadas dos funciones f(x) y g(x) integrables en $[a,b]$, escribe 3 propiedades de la integral

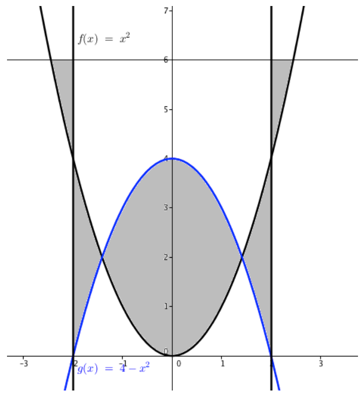
AI.5. Verifique que se cumple las siguientes igualdades: $\int \sin x\cos x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x^2$; $\int \sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2$
Cómo se explica esto dado que $-\frac{1}{2}\cos x^2$ y $\frac{1}{2}\operatorname{sen} x^2$ son dos funciones distintas

AI.6 Porqué el cálculo de la integral $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{1}x^{-2}\,dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1}=\frac{-1}{-1}-\frac{-1}{-1}=-2$ es incorrecta?

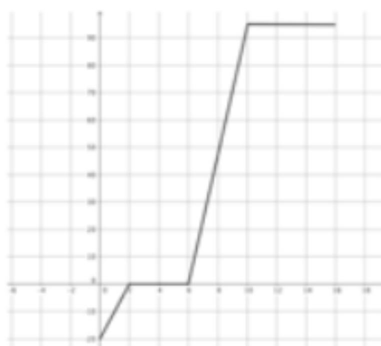
AI.7 Calcule las siguientes integrales:

a) $\int (x^2+x)^3 dx$
b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$
c) $\int x\,sec(x^2)dx$
d) $\int_{-3}^{3}|x+2|dx$

AI.8 Encuentra el área de las regiones sombreadas



AI.9. En la siguiente gráfica aparece el comportamiento de la temperatura T de 1 L de agua, desde el estado sólido hasta que se evapora. Analice la gráfica y conteste lo que se pregunta.



a) ¿Cuánto cambia la temperatura desde que la fusión termina hasta que empieza a evaporización? Justifica tu respuesta

b) Obtenga la temperatura del agua entre los 6 y los 8 minutos? Justifica tu respuesta

AI.10.Si $\Delta y > 0$; $y = f(x)$, ¿cuál de las siguientes alternativas es cierta?

a) $f(x+ \Delta x)>f(x)$

b) $f(x+ \Delta x)<f(x)$

c) $f(x+ \Delta x)=f(x)$

d) $\Delta x=0$ para todo x

Justifique su respuesta

Sesión II.

AII.1. Determinar de las siguientes tablas, cuál representa una función lineal y cuadrática y encuentra su expresión algebraica.

x	y
-3	-78
-2	-57.75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

Tabla 1

x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

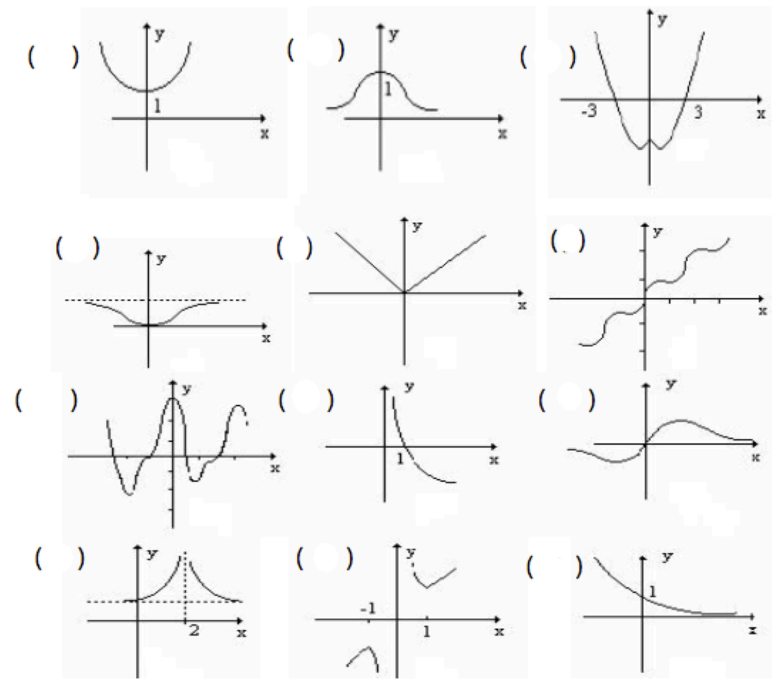
tabla 2

x	y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Tabla 3

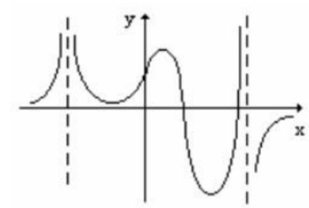
AII.2. Enseguida aparecen una lista de 18 expresiones algebraicas y una colección de 12 gráficas. Busca hacer corresponder a cada gráfica una sola expresión analítica, elígela dentro de la lista:

- (a) $y = 1 + 1 / (x - 2)^2$
- (b) $y = 1 / (x + 2) + 1$
- (c) $y = e^x$
- (d) $y = x / (x^2 + 1)$
- (e) $y = (x^2 + 1) / x$
- (f) $y = x^2 + 1$
- (g) $y = e^{-x}$
- (h) $y = 1 / (x^2 + 1)$
- (i) $y = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$
- (j) $y = x + \operatorname{sen} x$
- (k) $y = x^2 - 2|x| - 3$
- (l) $y = -\ln x$
- (m) $y = \ln(-x)$
- (n) $y = 1 - 1 / (x^2 + 1)$
- (o) $y = | x |$
- (p) $y = x^2 / (x + 1)$
- (q) $y = \sqrt{(\operatorname{sen} x)} + \sqrt{(\cos x)}$
- (r) $y = \operatorname{senh}(x - 1)$



AII.3. Sea la gráfica y=f(x) que se muestra en la ilustración. Haz un bosquejo grafico que mejor aproxime a cada una de las siguientes funciones.

a) y=-f(x)
b) y=f(-x)
c) y=|f(x)|
d) y=f(|x|)
e. y=1/f(x)



y=f(x)

AII.4 Determine los parámetros de la siguiente función para que alcance el siguiente límite cuando x es muy grande.

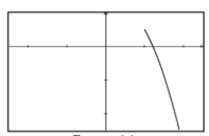
$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{cx^2+b}} = 5$$

AII.5 La función f(x) definida como aparece a continuación no es derivable en x=0.

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x}+2, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}+2, & x < 0 \end{cases}$$

Observe la no derivabilidad de f(x) a través de la “iteración lineal” .

AII.6 La curva de la figura representa una rama de la gráfica de la función $-1.5x^2 + x + 1$ para x>1

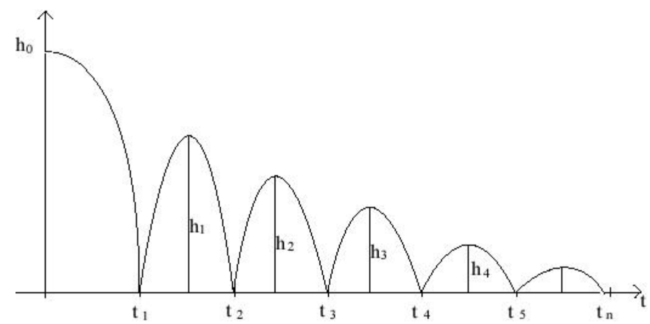


a) Trace una recta que toque tangencialmente a la rama cuando *x*=1.

b) Considerando el inciso (a) defina una función diferenciable definida en todos los nú- meros reales.

AII.7 Supongamos que la función polinómica $f(x) = x_n + a_n - 1x_{n-1} + \ldots + a_0$ tiene los puntos críticos en $f'(-1) = f'(1) = f'(2) = f'(3) = 0$ y $f''(-1) = 0$ y $f''(1) > 0, f''(2) < 0$ y $f''(3) = 0$. Trazar dos gráficas aproximadas de f con todo detalle posible a partir de esta información.

AII.8 La siguiente ilustración representa la altura de una pelota que rebota en determinados tiempos.



Apoyándose de la ilustración, bosqueja la gráfica considerando la velocidad contra tiempo

SECCIÓN III

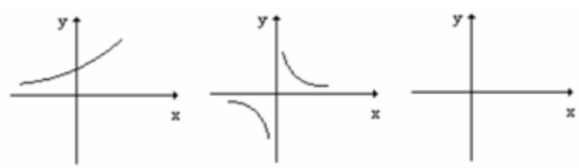
t

Objetivo de sección. Resolver actividades con apoyo del uso gráfico

CONTENIDO

1. En esta sesión se encuentran actividades donde requiere hacer uso de la gráfica. Se trata de bosquejar la gráfica y otras de construirla para resolver las actividades.
2. Se recomienda hacer uso de algún software graficador
3. La entrega de estas actividades será en un documento en formato pdf, donde se vea las explicaciones escritas con apoyo de gráficas y procedimientos algebraicos.

AIII.1. Dadas las gráficas de f (x) y g(x). Construye la gráfica de la composición $(f\ o\ g)(x)$.



f(x) *g(x)*

AIII.2 Dadas las funciones f y g, encuentra las funciones h e i da- das por h(x) = (f o g)(x), i(x) = (g o f)(x). Esboza las gráficas de f (x), g(x), h(x) e i(x), finalmente determina el rango en todos los casos.

$$f(x) = \begin{cases} 2\ si\ x \leq 1 \\ 0\ si\ 1 < x < 2\ y\ g(x) = |x+1| \\ -1\ si\ 2 \leq x \end{cases}$$

AIII.3 Resuelva por métodos gráficos la siguiente desigualdad

$$\left||3x-2|-8\right| \geq \left|\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - 3\right|$$

AIII.4 ¿Para qué valor(es) de x la pendiente de la línea tangente a la curva y = $-x^3 + 3x^2 + 1$, tiene el valor más grande? Justifica

A III.5 Dada una familia de funciones donde la variable ***n*** para ***n>0***, se asocia a la función $\boldsymbol{f_n}$ definida sobre $(-1,+\infty) de\ f(x) = x^n In(1+x)$. Se tiene:

a) Sea $h_n(x) = nIn(1+x) + \frac{x}{(1+x)}$. Estudia el sentido de variación de $\boldsymbol{h_n}$, utilizando el valor de $\boldsymbol{h_n}(0)$, determina el signo de la función $\boldsymbol{h_n}(x)$ sobre $(-1,+\infty)$.
b) Para toda x perteneciente a $(-1,+\infty)$ verifica que $f1'(x) = h1(x)$, por medios gráficos y algebraico

c) Supón n impar. Para todo x perteneciente a (-1, +∞), justifica que fn' y hn(x) tienen el mismo signo. Diseña entonces la tabla de variaciones de la función *fn* cuando *n* es impar precisando sus límites en -1 y en +∞.

d) Supón n par. Diseña una tabla de variaciones de fn cuando n es par, y precisa sus límites en -1 y en +∞.

AIII.6 En esta parte, U designa la sucesión de término general U_n definida para todo natural por:

$$U_n = \int_0^1 x^n In(1+x)dx$$

a) Demuestra que: $0 \leq U_n \leq \frac{In2}{(n+1)}$

b) Deduce entonces que la sucesión U es convergente y da su límite

c) Con ayuda de lo obtenido en a) determina un entero natural n_0 tal que para todo n ≥ n_0 se tiene:

$$0 \leq Un \leq 1/100$$

AIII.7 Cálculo de U1

a) Recuerda que para todo x en el intervalo (-1, +∞), se tiene:

$$\frac{x^2}{(1+x)} = x - 1 + \frac{1}{1+x}$$

Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)} dx$

b) Calcula U1 por medio de una integración por partes

AIII.8 Sea E el conjunto de puntos M del plano, de coordenadas (x, y) verificando

$$0 \leq x \leq 1 \text{ y } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

Calcula U_2 y deduce el área de E en cm^2

AIII.9 De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	....	Segundos
V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		metro/segundo

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	....	Segundos
S	2											metros

a) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 segundos

b) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo

c) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el

tiempo 6 (segundos) hasta el tiempo 12 (segundos)

d) Realizar la gráfica de velocidad vs tiempo y la gráfica de posición vs tiempo
e) Construir una expresión algebraica para la función velocidad y posición

Referencias con las que se elaboró el material

Acuña. C, Uriza, C., Osorio F., Farfán R. y Oktack, A. (1995). *Cuadernos de trabajo*, México: Cinvestav.

Cordero, F., Muñoz, G. y Solís, M. (2002). *La integral y la noción de variación*. Serie: Cuadernos de Didáctica. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Crisologo D. (2013). *La variación y la derivada*. Ediciones Díaz Santos, México

Cordero, F. y Solís, M. (2001). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del cálculo*. Grupo Editorial Latinoamericana. Edición Especial. ISBN: 9706252983.