Pensamiento Variacional

GUIA PARA LOS ASPIRANTES A LA MME- 2016

Es recomendable que el aspirante use los siguientes conceptos:

Función

a) como relación entre conjuntos,
b) como expresión analítica,
c) como gráfica,
d) como tablas.
e) Como modelo para un sistema.
f) Funciones prototípicas: lineales, cuadráticas, trigonométricas, exponenciales.

Límite.

a) Desde el punto de vista de aproximaciones,
b) épsilon-delta,
c) algoritmos de cálculo de límites.
d) Aplicaciones de los límites.

Derivada

a) como límite.
b) Algoritmos de cálculo de derivadas.
c) Aplicándola para resolver problemas que involucren fenómenos de variación.

Integral

a) Definición
b) Algoritmos de cálculo de integrales.
c) Aplicándola para resolver problemas que involucren fenómenos de variación.

Ecuación diferencial

a) Definición, clasificación.
b) Algoritmos para la resolución de ecuaciones tipo.
c) Plantear, a partir de un problema de variación tipo, una ecuación diferencial.

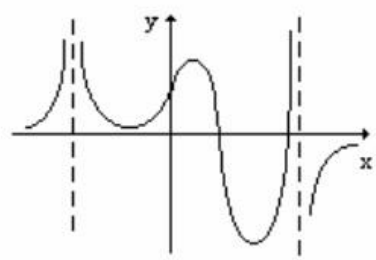
Problemario:

a) Defina función y de 3 ejemplos.
b) Defina el límite de una función f(x) en el punto x=c, usando épsilon-delta.
c) Defina la derivada como un límite.
d) Defina ecuación diferencial y de 3 ejemplos.
e) Dada las siguientes funciones, señale cuál es su dominio:
   a. $y = 1/x^2$
   b. $f(x) = \frac{sen(x)}{\sqrt{1-x^2}}$
f) Haga un bosquejo de las siguientes gráficas:
   a. $f(x) = 3 - (x-1)^2$
   b. $y = 3\, sen(x-1)$
   c. $y = 1 - e^x$

g) Dada la gráfica de y=f(x), bosqueja entonces la gráfica de cada una de las funciones que se te indican.

   a) y= - f(x)
   b) y= f(-x)
   c) y= |f(x)|
   d) y= f(|x|)
   e) y= 1/f(x)

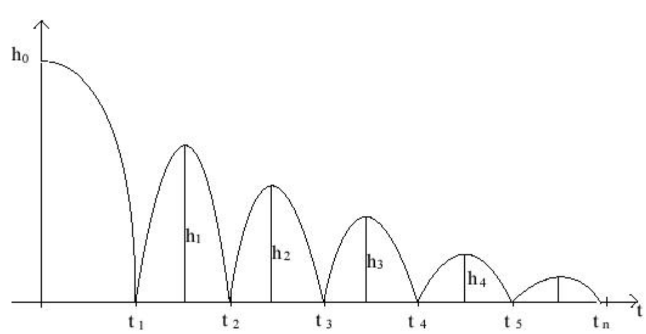
y=f(x)



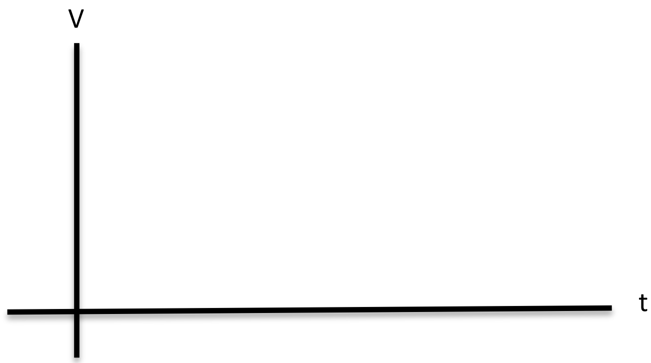
h) De un ejemplo de una función en la cual el límite no exista en un punto x=2.
i) Determine los parámetros de la siguiente función para que alcance el siguiente límite cuando x es muy grande.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{cx^2+b}} = 5$$

j) La siguiente ilustración representa la altura de una pelota que rebota en determinados tiempos.



Apoyandose de la ilustración bosqueja la gráfica de velocidad contra tiempo



k) Determinar de las siguientes tablas, cuál representa una función líneal y cuadrática y encuentra su expresión algebraica.

x	y
-3	-78
-2	-57.75
-1	-40.5
0	-26.25
1	-15
2	-6.75
3	-1.5

Tabla 1

x	y
-3	624
-2	404.25
-1	243
0	131.25
1	60
2	20.25
3	3

tabla 2

x	y
-3	-29.25
-2	96
-1	221.25
0	346.5
1	471.75
2	597
3	722.25

Tabla 3

l) Sea $f(x) = \begin{cases} ax, & x \leq 1 \\ bx^2 + x + 1, & x > 1 \end{cases}$ encuentre a y b tales que f sea derivable en 1 y posterior, realice su gráfica.

m) Calcule las antiderivadas de las siguientes funciones:

a. $y = x/(1-x)$
b. $f(x) = sen(x^2)$
c. $f(t) = e^{1-\text{sen}\,(x)}$

n) Según el teorema fundamental del cálculo sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ por:

$$F = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces se cumple que:

a) F *es continua en* $[a,b]$

b) *En todo punto* c *de* $[a,b]$ *en el que* f *sea continua se verifica que* F *es derivable en dicho punto siendo F´(c)= f(c)*
c) *Ambas*
d) *Ninguna de las dos*

o) Contesta falso o verdadero. *Si una función f es continua en* $[a,b]$ *entonces ¿f es integrable en* $[a,b]$*?* ***F V***

p) Dadas dos funciones f(x) y g(x) integrables en $[a,b]$, escribe 3 propiedades de la integral

1. ____
2. ____
3. ____

q) ¿Por qué el cálculo de la integral $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{1}x^{-2}\,dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1}=\left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1}=\frac{-1}{-1}-\frac{-1}{-1}=-2$ es incorrecta?

r) Calcule las siguientes integrales:

i. $\int\left(x^2+x\right)^3dx$
ii. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$
iii. $\int x\sec(x^2)dx$
iv. $\int_{-3}^{3}|x+2|dx$

s) En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función a fin que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

t) El nivel de contaminación de una ciudad a las 6 de la mañana es de 30 partes por millón y crece de forma lineal 25 partes por millón cada hora. Sea y la contaminación en el instante t después de las 6 de la mañana.

u) Hallar la ecuación que relaciona y con t.

v) Calcular el nivel de contaminación a las 4 de la tarde.

w) Calcule los siguientes límites:

a. $\lim_{x\to 6}\frac{x-6}{x^2-36}$
b. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-x-9}$
c. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}$

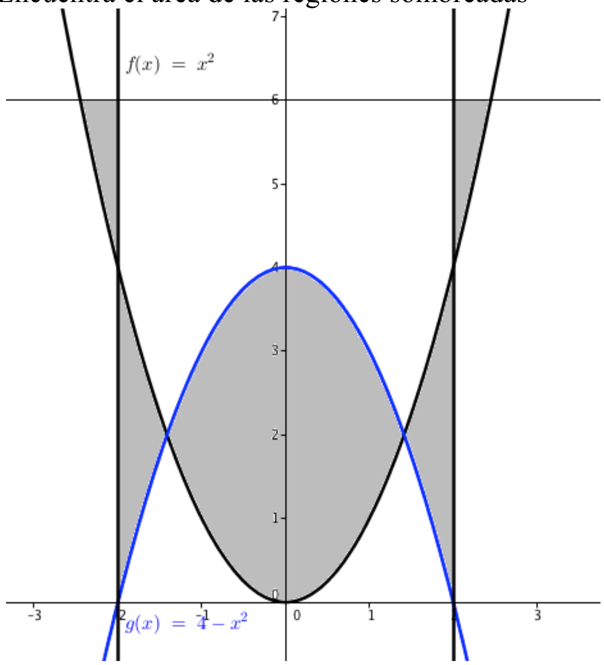
x) ¿Qué significa que la función f(x) es solución de la ecuación diferencial y’’+y+2=0?

y) Resuelva para *y*:

a. y'=x
b. y’’=y
c. y’-y-1=x

z) Verifique que se cumple la siguientes igualdades: $\int\sin x\cos x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x^2$; $\int\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\text{sen}\,x^2$

a) Cómo se explica esto dado que $-\frac{1}{2}\cos x^2$ y $\frac{1}{2}\text{sen}\,x^2$ son dos funciones distintas aa) Encuentra el área de las regiones sombreadas



bb) De una partícula que se está moviendo sobre una línea recta se obtuvo la siguiente información:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…………………….....	Segundos
V	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		metro/segundo

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…………………….....	Segundos
S	2											metros

a) Calcular la posición de la partícula cuando el tiempo sea igual a 6 segundos
b) Calcular la posición de la partícula para cualquier tiempo
c) Calcular la distancia que recorrería la partícula desde el tiempo 6 (segundos) hasta el tiempo 12 (segundos)
d) Realizar la gráfica de velocidad vs tiempo y la gráfica de posición vs tiempo
e) Construir una expresión algebraica para la función velocidad y posición

cc) Para cada uno de los siguientes problemas, plantee una ecuación diferencial:

a. Una mañana de enero comienza a nevar y sigue nevando a razón constante. Una máquina quitanieves se pone a trabajar a medio día, limpiando a razón constante (volumen por unidad de tiempo).
b. Consideremos una muestra radiactiva que consta de N(t) átomos en el instante de tiempo t. A la vista de diversos experimentos realizados, es plausible suponer que la velocidad de desintegración es proporcional, en cada instante, al número de átomos presente en la muestra. Si inicialmente la muestra consta de N_0 átomos, queremos determinar el número de átomos en cualquier instante posterior.