GUÍA DE PARA LOS ASPIRANTES A LA MME-2016

Temas que debe dominar:

- Definición, operaciones y propiedades de:

  Números Naturales
  Números Enteros
  Números racionales
  Números irracionales
  Números complejos
  Polinomios
  Matrices
  Determinantes
- Definición de conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales.
- Inversa de una matriz, condiciones necesarias y suficientes para que una matriz sea invertible y métodos para determinarla (cuando existe).
- Algoritmo de la división y propiedades de divisibilidad de números enteros
- Sistemas de ecuaciones lineales y métodos de solución.

Problemario.

I. Verifica el cumplimiento de las propiedades que se indica en cada una de las operaciones

a) $\frac{13}{2}+\left(\frac{-12}{5}+\frac{11}{3}\right)$ Propiedad asociativa de la suma

b) $-\frac{2}{9}\left(\frac{4}{3}-\frac{3}{5}\right)$ Propiedad distributiva

c) $-\frac{3}{7}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)$ Propiedad asociativa del producto

II. Calcula las siguientes operaciones de números racionales

a) $$\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\right)}{1\frac{4}{5}-\frac{9}{20}}=$$

b) $$\frac{3^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2}=$$

III. Dados $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ números enteros, encuentra los enteros $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$ tales que $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{aq} + \boldsymbol{r}$ con $0 \le r < |a|$

$a)$ $a = 34$ $b = 17$ $c)$ $a = -57,$ $b = -2363$

$b)$ $a = 62$ $b = -1357$ $d)$ $a = -27$ $b = 7846$

IV. Dados los Siguientes polinomios realiza las operaciones que se indican

$$p(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 2, \qquad g(x) = -5x^3 + x^2 - x + 1, \qquad h(x) = x^5 - x^4 + 5x^3 - x + 1,$$

$$s(x) = 2x^3 - 3x^4 + x^2 + 1, \qquad f(x) = x^2 + 5x + 1, \qquad t(x) = x^4 - 3x^2 + 6x - 1$$

$a)$ $2p(x) - 3g(x)$ $b)$ $h(x)f(x) - 2t(x)$ $c)$ $-p(x)s(x) + 4g(x)$ $d)$ $\left[f(x)\right]^2 - s(x)$

V. Calcula el valor de ***p(x)*** en el ***c*** que se indica

$a)$ $p(x) = 3x^3 - 26x^2 + 34x - 12$ $c_1 = \frac{2}{3}$ $c_2 = 1$

$b)$ $p(x) = x^5 + 5x^4 - 26x^3 - 97x^2 - 101x - 70$ $c_1 = 2,$ $c_2 = -2$, $c_3 = 5$

VI. Si $Z_1 = -5$ $Z_2 = 1 - i,$ y $Z_3 = -4i$ Calcula:

$$Z_2 \overline{Z_3} + 5Z_1$$

VII. Realiza el cálculo que se indica en cada inciso, sabiendo que:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) $\boldsymbol{A - 2B}$ b) $\boldsymbol{2BC}$ c) $\boldsymbol{AC - 3D}$

VIII. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ x - y &= 1 \\ -6x - 2y &= k \end{aligned}$$

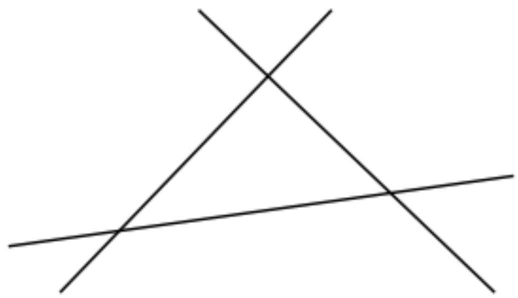
a) ¿Es posible que este sistema tenga solución única? Si la respuesta es si:
   i) ¿Cuál es la solución?
   ii) Grafica este sistema y muestra la solución geométricamente.

Si la respuesta es no, justifica tu respuesta.

IX. Consideremos el sistema de ecuaciones $\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$

a) Encuentra el conjunto solución del sistema dado. ¿Cuántas soluciones tiene?
b) Grafica el sistema de ecuaciones ¿Qué observas?
c) Comenta acerca del conjunto solución.

X. Dada la representación geométrica de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas



a) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?
b) Da un sistema de ecuaciones, algebraicamente, que pueda representar a la figura anterior.
c) ¿Cuál es el conjunto solución de tu sistema propuesto? ¿Qué observas?

XI. Conteste lo que se pide de manera clara y precisa. Sean A y B matrices

a) ¿De qué tamaño deben ser A y B para que esté definida la operación de suma?
b) Si se puede calcular A^2, ¿Qué se puede decir sobre la dimensión de A?
c) Si se puede calcular AB y BA, describir las dimensiones de A y B.
d) Si se puede calcular ABC, A es de 3×3 y C es de 5×5, ¿de qué dimensión es B?
e) Enuncie tres propiedades que cumpla la transpuesta de una matriz A.
f) Enuncie las tres operaciones elementales por renglón.
g) Enuncie tres propiedades que cumpla la inversa de una matriz

XI. Conteste lo que se pide, considere que la matriz A es de $n\times n$ (justifique su respuesta)

a) Una matriz A se llama idempotente si $A^2 = A$. ¿Cuáles son los valores posibles para $\det(A)$ si A es idempotente?
b) Si la matriz A satisface la condición $A^3 = A$ ¿Cuáles son los valores posibles para $\det(A)$?
c) Si la matriz A satisface la condición $A^2 + I = 0$ ¿Cuáles son los valores posibles para $\det(A)$?

XII. Si $det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -2$. Calcular $det\begin{bmatrix} 2b & 0 & 4d \\ 1 & 2 & -2 \\ a+1 & 2 & 2(c-1) \end{bmatrix}$

XIII. Hallar b si $det\begin{bmatrix} 5 & -1 & x \\ 2 & 6 & y \\ -5 & 4 & z \end{bmatrix} = ax + by + cz.$

XIV. Hallar la inversa de $\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ para cualquier número real θ.

XV. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifique su respuesta)

a) Si $A \neq 0$ es una matriz cuadrada, entonces A es invertible.
b) Si A y B son invertible, entonces $A + B$ es invertible.
c) Si A y B son invertible, entonces $(A^{-1}B)^T$ es invertible.
d) Si $A^4 = 3I$, entonces A es invertible.
e) Si $A^2 = A$ y $A \neq 0$, entonces A es invertible.
f) Si $AB = B$ para alguna matriz $B \neq 0$, entonces A es invertible.
g) Si A es invertible y antisimétrica $\left(A^T = -A\right)$, también es antisimétrica A^{-1}.

XVI. Hallar la matriz A que tiene como inversa a la matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

XVII. Si es el caso, encuentra la solución general y da una solución particular del siguiente sistema de ecuaciones, o bien, determina si no tiene solución o qué tipo de solución se presenta.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 &= 7 \\ -x_1 + 10x_3 - 3x_4 - 4x_5 &= -16 \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 4x_4 - x_5 &= 2 \\ 4x_1 + 11x_2 - 7x_3 - 10x_4 - 2x_5 &= 7 \end{aligned}$$

XVIII. Construye un polinomio cuyo valor en $c_1 = 0, c_2 = 2+i, y\ c_3 = 2-i$ sea igual a cero y que tome el valor de ***1*** $c_4 = -1$ y ***-1*** en $c_5 = 1$.

XIX. La organización de los resultados de un torneo de tenis se hace siguiendo lo que se explica a continuación:

Cada uno de los ***n*** participantes juega contra cada uno de los otros ***n-1*** y los resultados se registran en una matriz ***A*** de orden ***nxn*** de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ el\ i-ésimo\ \ jugador\ vence\ al\ \ j-ésimo\ \ jugador \\ 0 & si\ el\ i-ésimo\ \ jugador\ \ pierde\ ante\ el\ \ j-ésimo\ \ jugador \\ 0 & si\ i = j \end{cases}$$

Finalmente al ***i-ésimo*** jugador se le asigna la puntuación que se obtiene de la siguiente fórmula:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(a^2\right)_{ij}$$

Donde $\left(a^2\right)_{ij}$ es la ij-ésima entrada de la matriz $AA = A^2$.

1. Construya la matriz que corresponda a un torneo de 4 participantes
2. Esta es la matriz que describe los resultados de un torneo de 6 participantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Qué lugar ocupó el jugador número 3?
b) ¿Qué jugador ocupó el primer lugar?
c) ¿Qué jugador ocupó el último lugar?