Unidad Académica de Matemáticas
Universidad Autónoma de Zacatecas
"Francisco García Salinas"

Maestría Profesionalizante en Matemática Educativa
Guía de Estudio - Nivel Profesional

Esta guía es ilustrativa de lo que se espera que los aspirantes sepan, más no es exhaustiva, las materias a evaluar son las siguientes: Álgebra Superior, Geometría Analítica, Trigonometría, Cálculo diferencial e integral, Probabilidad y Estadística, Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

CALCULO DIFERENCIAL

1. Resuelva el siguiente problema y exprese la solución utilizando el valor absoluto:
   Un vaso de precipitados de ½ litro (500 centímetros cúbicos) tiene un radio interno de 4 centímetros. ¿Con que exactitud debemos medir la altura *h* del agua en el vaso para asegurar que tenemos ½ litro de agua con un error de menos de 1%, esto es, un error de menos de 5 centímetros cúbicos?
   (El vaso precipitado tiene forma cilíndrica).

2. Explique si la siguiente aseveración es falsa o verdadera 13.9999999999999...=14

3. Dadas las siguientes funciones, determine su dominio y su rango así como la gráfica de cada función.

   a) $f(x)=\begin{cases} e^x & x\le 0 \\ Cosx & x>0 \end{cases}$ b) $g(x)=\dfrac{3x+2}{2-x}$ c) $f(x)=\left|\ln x\right|$

4. Calcular y explicar el procedimiento utilizado para encontrar los siguientes límites

   a) $\lim\limits_{x\to\pi^-} Cscx$ b) $\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{1}{t\sqrt{1+t}}-\dfrac{1}{t}\right]$ c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

   d) $\lim\limits_{x\to -4^-}\dfrac{|x+4|}{x+4}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7-1}{x^6+1}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$

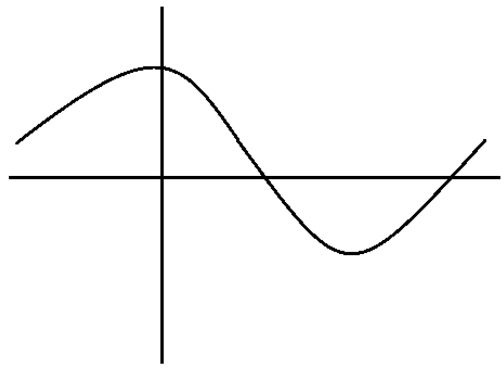
5. Explique de dos formas distintas ¿qué es la recta tangente en un punto *c* de una función *f(x)* y cuál es el papel que juega la derivada en la definición de la recta tangente?

6. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones.

a) $y(x)=x\sqrt{x}+\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$ b) $g(x)=\frac{1+xe^x}{\sqrt{x}}$ c) $g(x)=\frac{Sen^2x}{Cosx}$

d) $xy=Cotxy$ e) $y(x)=xCos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$ f) $h(t)=\ln(Sect+\tan t)$

7. Dada la siguiente gráfica de una función *f(x)*, encuentre la gráfica de su primera, segunda y tercera derivada y explique en que se baso para el resultado de cada gráfica.



CALCULO INTEGRAL

8. Conteste con verdadero o falso cada una de las siguientes afirmaciones y justifique su respuesta.
   a) Toda función *f(x)* es integrable.
   b) Si una función *f(x)* es discontinua en un número finito de puntos sobre un intervalo *[a, b]*, entonces $\int_a^b f(x)dx$ siempre existe.
   c) Si una función *f(x)* es continua en cualquier punto sobre el intervalo *[a, b]*, entonces $\int_a^b f(x)dx$ siempre existe.
9. Argumente la siguiente desigualdad sin evaluar la integral $2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$
10. Evalúe las integrales o muestre que son divergentes

a) $\int e^x\sqrt{1-e^{2x}}dx$ b) $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}dx$ c) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{4x^2-4x+5}$

d) $\int_1^e \frac{dx}{x\left[1+(\ln x)^2\right]}$ e) $\int Cos^3xSen^2xdx$ f) $\int \frac{x^2+2}{x+2}dx$

g) $\int_2^4 \|x\|dx$ h) $\int_0^4 |x-1|dx$ i) $\int \frac{y^3+y}{y+1}dy$

11. El 24 de abril de 1990, el transbordador espacial *Discovery* desplego el telescopio espacial Hubble. Un modelo para la velocidad del transbordador durante esta misión, desde el despegue en t=0 hasta que los cohetes auxiliares de combustible sólido se desprendieron $t=126$ *s*, se expresa mediante $v(t) = 0.001302t^3 - 0.09029t^2 + 23.61t - 3.083$ pies/s. Con este modelo, estime los valores máximo y mínimo absolutos de la aceleración del transbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares.
12. Halle el área de la región limitada por la parábola $y(x) = x^2$, la recta tangente a esta parábola en *(1,1)* y el eje x.
13. Supongamos que x horas después de medianoche, la temperatura en una cierta ciudad de Europa Central obedece aproximadamente a la fórmula $T(x) = 2 - \frac{1}{7}(x-13)^2$. Halle la temperatura media entre las 2:00 y las 14:00, y la hora a la que alcanza esa temperatura media.
14. Una población animal crece a razón de *200 + 50t* anualmente (*t* medido en años) ¿Qué tanto aumenta la población entre el año 4 y el año 10? ¿Cuál es el crecimiento promedio de esta población en dicho periodo?

ALGEBRA LINEAL

15. Discutir y resolver los siguientes problemas

a) $\begin{array}{l} (a+1)x + y + z = a^2 + 3a \\ x + (a+1)y + z = a^3 + 3a^2 \\ x + y + (a+1)z = a^4 + 3a^3 \end{array}$

b) $\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = k \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2 \end{array}$

16. Demuestre que el sistema de ecuaciones $\begin{array}{l} x = by + cz \\ y = cz + ax \\ z = ax + by \end{array}$ tiene una solución distinta de la trivial si y sólo si $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$.

17. El doctor le prescribe a un paciente 5 unidades de vitamina A, 13 unidades de vitamina B y 23 unidades de vitamina C, cada día. Existen en el mercado tres marcas diferentes de vitaminas y el número de unidades por pastilla, de cada una de ellas, se muestra en la tabla adjunta

	Vitaminas		
Marca	A	B	C
1	1	2	4
2	1	1	3
3	0	1	1

a) Encuentre todas las combinaciones de pastillas que producirán la cantidad exacta de vitaminas, requerida (no se permite dividir las pastillas).
b) Si las marcas 1, 2 y 3 cuestan 3pesos, 2 pesos y 5 pesos respectivamente, encuentre el tratamiento más barato.

18. Resuelva el siguiente problema: Tres jugadores disputaban un torneo y su puntuación se ha perdido. La única información disponible es la puntuación total de los jugadores 1 y 2, la puntuación total de los jugadores 2 y 3 y la puntuación total de los jugadores 3 y 1.
a) Demuestre que se puede averiguar de nuevo la puntuación individual de cada jugador.
b) ¿Sería posible hacer lo mismo con cuatro jugadores (conociendo la puntuación total de los jugadores 1y2, 2 y 3, 3 y 4 y 4y1)?

19. Demuestre que $\det\begin{pmatrix} a+px & b+qx & c+rx \\ p+ux & q+vx & r+wx \\ u+ax & v+bx & w+cx \end{pmatrix} = (1+x^2)\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{pmatrix}$.

20. Demuestre que la recta que atraviesa dos puntos distintos del plano (x_1, y_1) y (x_2, y_2), tiene de ecuación $\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$.

21. El determinante de Vandermonde de 4×4 está dado por $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$.

Demuestre que $D_3 = (a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)$.

a) Demostrar que, para dos matrices A y B cualesquiera de orden $n\times n$, $\det(AB) = \det(BA)$.
b) Si A es una matriz antisimétrica de $n\times n$, demuestre que $\det(A^T) = (-1)^n \det(A)$
c) Usando el resultado anterior, demuestre que si A es una matriz antisimétrica de $n\times n$ y n es impar, entonces $\det(A)=0$
d) Una matriz A se llama ortogonal si A es invertible y $A^{-1} = A^T$. Demostrar que si a es ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.
e) La matriz A de orden $n\times n$ se llama nilpotente si $A^k = 0$, para algun entero $k \geq 1$. Demuestre que si A es nilpotente, entonces $\det(A) = 0$.
f) La matriz A se llama idempotente si $A^2 = A$. ¿Cuáles son los valores posibles para $\det(A)$ si A es idempotente?

g) Demostrar que no existe ninguna matriz A de orden 3×3 tal que $A^2+I=0$. Encontrar una matriz de orden 2×2 con esta propiedad.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

22. Encuentre, por inspección, dos soluciones diferentes del problema con condición inicial

$$\frac{dy}{dx}=3y^{2/3} \qquad y(0)=0$$

¿Por qué esto no contradice el teorema establecido en esta sección?

23. Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que su velocidad en cualquier tiempo $t\geq 0$ está dada por $v=\dfrac{1}{t^2+1}$. Asumiendo que inicialmente se encuentra en el origen, demuestre que la partícula nunca pasará por $x=\pi/2$.

24. Si $y=Y_1(x)$ y $y=Y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial $y''+3y'-4y=0$ demuestre que $y=c_1Y_1(x)+c_2Y_2(x)$ es también una solución de la ecuación diferencial, donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias.

25. ¿Si $y=Y_1(x)$ y $y=Y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial $y''+y^2=0$, es $y=c_1Y_1(x)+c_2Y_2(x)$ también solución de la ecuación diferencial? Compare con el ejercicio anterior y discuta. ¿Puede usted caracterizar el tipo de ecuaciones diferenciales que tenga la propiedad descrita en el ejercicio anterior?

26. Cierta ciudad tenía una población de 25,000 habitantes en 1960 y una población de 30,000 en 1970. Suponiendo que su población continúe creciendo exponencialmente con un índice constante, ¿Qué población pueden esperar los urbanistas que tenga la ciudad en el año 2000?

27. Supóngase que la rapidez con la que se desintegra un núcleo radiactivo es proporcional al número de núcleos que están presentes en una muestra dada. En una determinada muestra 10% del número original de núcleos radiactivos han experimentado desintegración en un periodo de 200 años.

    a) ¿Qué porcentajes de núcleos radiactivos originales quedarán después de 1000 años?
    b) ¿En cuántos años quedará solamente un cuarto del número original?