

Invitación a la complejidad topológica

Miguel A. Maldonado

II Coloquio *Comunicación Matemática*
Unidad Académica de Matemáticas

Mayo 2022

1 Topología

- Topología algebraica

2 Grupos de Homotopía

- Grupo fundamental

3 Aplicaciones

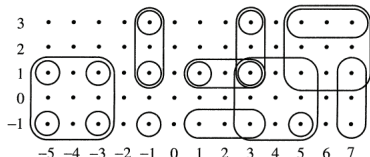
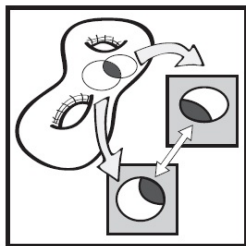
- Espacio de configuraciones
- Planeación motriz y Complejidad Topológica
- Cinemática Inversa

Topología

Topología

Del griego: *topos* lugar y *logos* estudio, descripción

- **Aspecto geométrico:** estudia propiedades de objetos que no cambian bajo deformaciones continuas (sin quiebres ni rupturas).



- **Aspecto analítico:** estudia los conceptos de cercanía y continuidad en un contexto más general que el métrico.

Espacio topológico [Hausdorff, '14]: conjunto X con noción de cercanía entre sus elementos, a través del concepto de abierto.

- Noción de cercanía es más general que la métrica
- En el caso de espacios métricos las estructuras coinciden

Espacio topológico [Hausdorff, '14]: conjunto X con noción de cercanía entre sus elementos, a través del concepto de abierto.

- Noción de cercanía es más general que la métrica
- En el caso de espacios métricos las estructuras coinciden

Ejemplos:

- Espacios **métricos**: (X, d) , $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} d(x, y) = 0 \iff x = y \\ d(x, y) = d(y, x) \\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \end{cases}$$

- Objetos usuales de Geometría (Clásica, Analítica), Cálculo, Análisis.

...esto bajo una nueva perspectiva:

Equivalencia en Topología

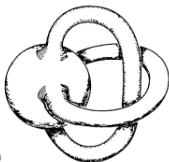
Homeomorfos: $X \cong Y \iff X$ deformable *continuamente* en Y



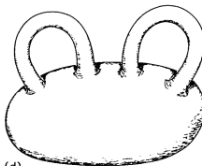
(a)



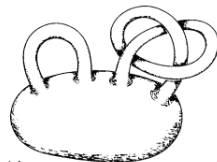
(b)



(c)



(d)



(e)



(f)

Equivalencia en Topología

- Define propiedades **robustas**:
no cambian con pequeñas variaciones en la medición.
- Estudio **cualitativo** de los objetos:
por ejemplo para clasificación.
- Es una herramienta para obtener información global a partir de información local.

Equivalencia en Topología

- Define propiedades **robustas**:
no cambian con pequeñas variaciones en la medición.
 - Estudio **cualitativo** de los objetos:
por ejemplo para clasificación.
 - Es una herramienta para obtener información global a partir de información local.
-
- La Topología ayuda a resolver problemas pues ofrece *obstrucciones* para ciertas construcciones.

Equivalencia en Topología

- Define propiedades **robustas**:
no cambian con pequeñas variaciones en la medición.
 - Estudio **cualitativo** de los objetos:
por ejemplo para clasificación.
 - Es una herramienta para obtener información global a partir de información local.
- La Topología ayuda a resolver problemas pues ofrece *obstrucciones* para ciertas construcciones.

Ejemplo:

Problemas de clasificación: dados X, Y , ¿cómo determinar si $X \cong Y$ o no?

Propiedades topológicas

Aquellas que tiene X y también todo Y , con $Y \cong X$.

Propiedades topológicas

Aquellas que tiene X y también todo Y , con $Y \cong X$.

Ejemplos:

- La cantidad de componentes o partes
- Ser cerrado y acotado (= ser **compacto** en $\mathbb{R}^n$)
- La *dimensión local*
- Propiedad de separar puntos (= ser **Hausdorff**)

Si dos espacios no tienen las mismas propiedades topológicas, no pueden ser homeomorfos!

Propiedades topológicas

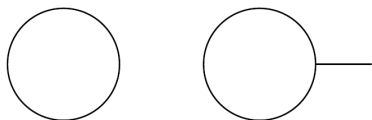
Aquellas que tiene X y también todo Y , con $Y \cong X$.

Ejemplos:

- La cantidad de componentes o partes
- Ser cerrado y acotado (= ser **compacto** en $\mathbb{R}^n$)
- La *dimensión local*
- Propiedad de separar puntos (= ser **Hausdorff**)

Si dos espacios no tienen las mismas propiedades topológicas, no pueden ser homeomorfos!

Ejemplo:



Topología algebraica

Topología

Álgebra

$$X \longrightarrow A(X)$$

Naturalidad:

$$X \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} Y \quad \Longrightarrow \quad A(X) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} A(Y)$$

Topología

Álgebra

$$X \longrightarrow A(X)$$

Naturalidad:

$$X \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} Y \quad \implies \quad A(X) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} A(Y)$$

Consecuencia: si $X \cong Y$, entonces $A(X) \cong A(Y)$.

Algunos ejemplos

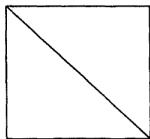
- **Cardinalidad.** $X =$ conjunto; $A(X) =$ número de elementos.

Algunos ejemplos

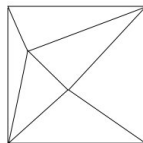
- **Cardinalidad.** $X =$ conjunto; $A(X) =$ número de elementos.
- **Característica de Euler.** $X =$ triangulación finita;
 $A(X) = \chi(X) = c - a + v.$

Algunos ejemplos

- **Cardinalidad.** $X =$ conjunto; $A(X) =$ número de elementos.
- **Característica de Euler.** $X =$ triangulación finita;
 $A(X) = \chi(X) = c - a + v.$



$$\chi = 2 - 5 + 4 = 1$$



$$\chi = 6 - 11 + 6 = 1$$

Algunos ejemplos

- Ecuaciones de lugares geométricos.

X = conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$; $A(X)$ = ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

asociada a cónica, punto, par de rectas.

Algunos ejemplos

- Ecuaciones de lugares geométricos.

X = conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$; $A(X)$ = ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

asociada a cónica, punto, par de rectas.

- Simetrías: X = polígono con $n \geq 2$ vértices;
 $A(X)$ = grupo de isometrías.

Aquí $A(X)$ es el **grupo diédrico** de orden n de rotaciones y reflexiones del polígono.

La naturalidad de la asociación $X \mapsto A(X)$ implica:

$$A(X) \not\cong A(Y) \implies X \not\cong Y$$

La naturalidad de la asociación $X \mapsto A(X)$ implica:

$$A(X) \not\cong A(Y) \implies X \not\cong Y$$

Ejemplos:

- **Cardinalidad:** distingue conjuntos finitos pero no a sus elementos.
- **Característica de Euler:** no distingue triangulaciones!
- **Ecuaciones:** distingue objetos geométricos aunque sean muy parecidos:

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \neq \{(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1\}$$

La naturalidad de la asociación $X \mapsto A(X)$ implica:

$$A(X) \not\cong A(Y) \implies X \not\cong Y$$

Ejemplos:

- **Cardinalidad:** distingue conjuntos finitos pero no a sus elementos.
- **Característica de Euler:** no distingue triangulaciones!
- **Ecuaciones:** distingue objetos geométricos aunque sean muy parecidos:

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \neq \{(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1\}$$

Buscamos estructuras $A(X)$ más *finas*, *sensibles* que detecten más estructura.

Grupos de homotopía

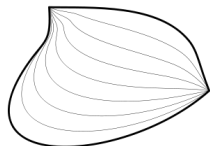
Homotopía

[Brouwer] **Homotopía** entre

$$f_0, f_1 : X \rightarrow Y$$

$$\{H_t : X \longrightarrow Y\}_{t \in [0,1]}, \quad \begin{cases} H_0 = f_0, \\ H_1 = f_1 \end{cases}$$

Notación: $f_0 \simeq f_1$.

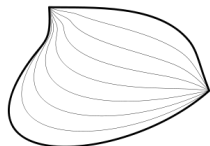


Homotopía

[Brouwer] **Homotopía** entre

$$f_0, f_1 : X \rightarrow Y$$

$$\{H_t : X \longrightarrow Y\}_{t \in [0,1]}, \quad \begin{cases} H_0 = f_0, \\ H_1 = f_1 \end{cases}$$



Notación: $f_0 \simeq f_1$.

X, Y son **homotópicos** si existen f, g tales que

$$f \circ g \simeq 1_Y, \quad g \circ f \simeq 1_X$$

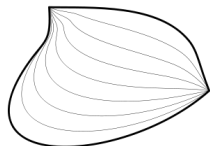
Notación: $X \simeq Y$.

Homotopía

[Brouwer] **Homotopía** entre

$$f_0, f_1 : X \rightarrow Y$$

$$\{H_t : X \longrightarrow Y\}_{t \in [0,1]}, \quad \begin{cases} H_0 = f_0, \\ H_1 = f_1 \end{cases}$$

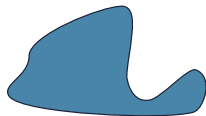


Notación: $f_0 \simeq f_1$.

X, Y son **homotópicos** si existen f, g tales que

$$f \circ g \simeq 1_Y, \quad g \circ f \simeq 1_X$$

Notación: $X \simeq Y$.



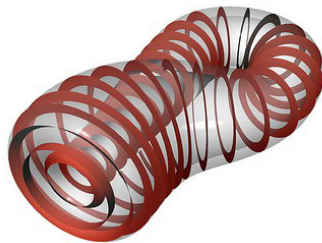
X es **contráctil** si es homotópico a uno de sus puntos.

Ejem.: *convexos, discos, líneas, planos.*

Esferas y espacios

- S^n : esfera de dimensión n
- Conjunto de funciones continuas

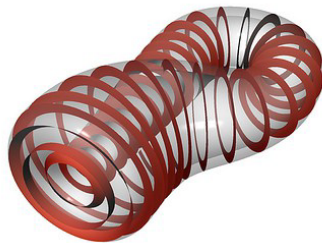
$$\Omega(S^n; X) = \{f : S^n \rightarrow X\}$$



Esferas y espacios

- S^n : esfera de dimensión n
- Conjunto de funciones continuas

$$\Omega(S^n; X) = \{f : S^n \rightarrow X\}$$



Para $f \in \Omega(S^n; X)$ consideramos

$$[f] = \{g \in \Omega(S^n; X) \mid f \simeq g\}$$

n -ésimo grupo de homotopía de X :

$$\pi_n(X) = \{[f] \mid f \in \Omega(S^n; X)\}$$

Naturalidad: toda función $f : X \rightarrow Y$ induce

$$f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$$

Naturalidad: toda función $f : X \rightarrow Y$ induce

$$f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$$

La asociación

$$X \longmapsto \{\pi_0(X), \pi_1(X), \pi_2(X), \dots\}$$

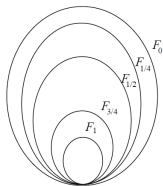
detecta más estructura de X :

- $\pi_0(X)$: conjunto que calcula las **componentes conexas** de X
- $\pi_n(X)$ grupo para $n \geq 1$
- $\pi_1(X)$ determina una biyección

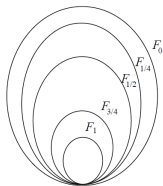
$$\{\text{subgrupos } H \subset \pi_1(X)\} \rightleftharpoons \{\text{espacios cubrientes } E \rightarrow X\}$$

- $\pi_1(X)$ detecta si X es **orientable**.

$\pi_1(X)$ definido a partir de lazos

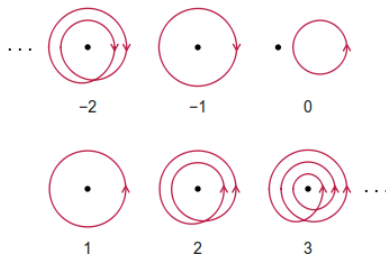


$\pi_1(X)$ definido a partir de lazos



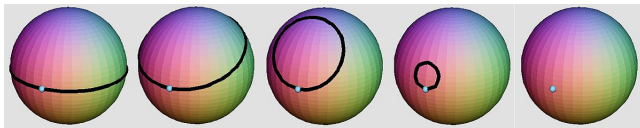
■ Circunferencia

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$



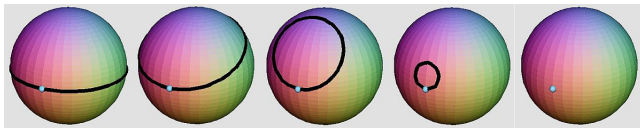
Esferas y espacios: cálculos

- Esfera $\pi_1(S^2) = 0$



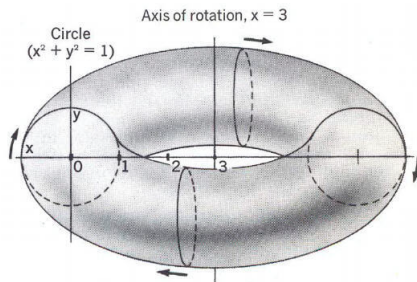
Esferas y espacios: cálculos

- Esfera $\pi_1(S^2) = 0$



- Toro

$$\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$



- Para $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$

$$\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$$

Esferas y espacios: cálculos

- Para $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$

$$\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$$

- Para $SO(3)$ grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Esferas y espacios: cálculos

- Para $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$

$$\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$$

- Para $SO(3)$ grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- Si X es contráctil, $\pi_1(X) = 0$

Esferas y espacios: cálculos

- Para $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$

$$\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$$

- Para $SO(3)$ grupo de rotaciones en $\mathbb{R}^3$

$$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- Si X es contráctil, $\pi_1(X) = 0$

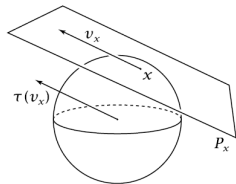
Los grupos $\pi_2(X), \pi_3(X), \dots$ no son tan fáciles de calcular.... ni para el caso de esferas!

Aplicación: campos tangentes

El **espacio tangente** a S^n

$$T(S^n) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$$

Si $(x, v) \in T(S^n)$, entonces v es **vector tangente** a S^n en x .

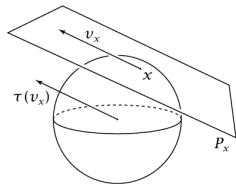


Aplicación: campos tangentes

El **espacio tangente** a S^n

$$T(S^n) = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle = 0\}$$

Si $(x, v) \in T(S^n)$, entonces v es **vector tangente** a S^n en x .



Para la proyección $p : T(S^n) \rightarrow S^n, (x, v) \mapsto x$ consideramos una sección:

$$s : S^n \rightarrow T(S^n), x \mapsto (x, v_x), \quad p \circ s = id$$

y la llamamos **campo vectorial tangente** a S^n .

Aplicación: campos tangentes



Figure: Campo
tangente para $n = 1$



Figure: Campo
tangente para $n = 2$

Aplicación: campos tangentes

Teorema

S^n admite campos tangentes no nulos sí, y sólo si, n es impar.

Teorema

S^n admite campos tangentes no nulos sí, y sólo si, n es impar.

Demostración (idea):

Una aplicación

Espacio de configuraciones

Espacio topológico $\mathcal{C}$ que representa todos los posibles estados de un sistema mecánico. Cada punto de $\mathcal{C}$ representa los parámetros de posición y orientación de las componentes mecánicas.

Espacio de configuraciones

Espacio topológico $\mathcal{C}$ que representa todos los posibles estados de un sistema mecánico. Cada punto de $\mathcal{C}$ representa los parámetros de posición y orientación de las componentes mecánicas.

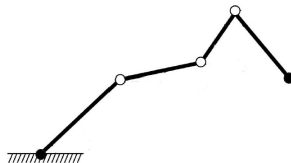
Ejemplos:

- Brazo articulado con una unión de un grado de libertad.



$$\mathcal{C} \cong S^1$$

- Brazo con 3 uniones



$$\mathcal{C} \cong S^1 \times S^1 \times S^1$$

Espacio de configuraciones

- Si el brazo tiene n uniones con un grado de libertad,

$$\mathcal{C} \cong \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n.$$

- Si hay dos grados de libertad en cada unión,

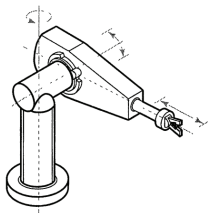
$$\mathcal{C} \cong S^2 \times \cdots \times S^2,$$

Espacio de configuraciones

- Si el brazo tiene n uniones con un grado de libertad,

$$\mathcal{C} \cong \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_n.$$

- Una rotación completa; dos desplazamientos

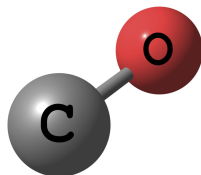


$$\mathcal{C} \cong S^1 \times [0, 1] \times [0, 1]$$

- Si hay dos grados de libertad en cada unión,

$$\mathcal{C} \cong S^2 \times \cdots \times S^2,$$

- Molécula de monóxido de carbono CO



$$\mathcal{C} \cong \mathbb{R}^3 \times S^2$$

Espacios de configuración

No sólo esferas surgen como espacio de configuraciones:

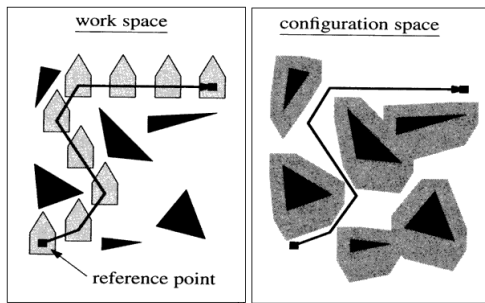
- Espacios **proyectivos** $\mathbb{RP}^n$: en caso de simetría

Espacios de configuración

No sólo esferas surgen como espacio de configuraciones:

- Espacios **proyectivos** $\mathbb{RP}^n$: en caso de simetría
- Movimiento **sin colisiones** en X

$$F_n(X) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j, i \neq j\} \subset X^n$$

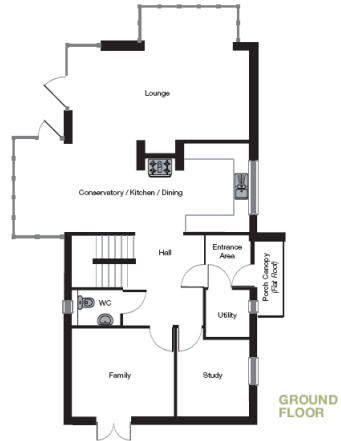


Estudiados por E. Fadell y L. Neuwirth a principios del S. XX.

Algoritmos de planeación motriz

Planeación motriz

Diseño, creación e implementación de **algoritmos** para el movimiento a través de cierta región.



Input y *Output* de algoritmos:

- Input = $x, y \in \mathcal{C}$
- Output = **trayectoria** entre x, y :

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X, \quad \alpha(0) = x, \quad \alpha(1) = y$$

Planeación motriz

Input y *Output* de algoritmos:

- Input = $x, y \in \mathcal{C}$
- Output = **trayectoria** entre x, y :

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow X, \quad \alpha(0) = x, \quad \alpha(1) = y$$

Planeación Motriz	
Región de movimiento	Creación de algoritmos
Posibilidades de movimiento	Secuencia de movimientos
Espacio de Configuraciones	Complejidad Topológica

Para $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ espacio de trayectorias, tomemos

$$\gamma : \mathcal{P}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C},$$

$$\gamma(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$$

Planeación motriz

Para $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ espacio de trayectorias, tomemos

$$\gamma : \mathcal{P}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C},$$

$$\gamma(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$$

Un **algoritmo** de planeación motriz es una inversa continua de γ ; es decir

$$\eta : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

tal que

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \xrightarrow{\eta} \mathcal{P}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C} \times \mathcal{C}$$

$$(x, y) \longmapsto \alpha_{xy} \longmapsto (x, y)$$

con $\alpha_{xy}(0) = x, \alpha_{xy}(1) = y$.

Planeación motriz

Farber, '03

Existe un algoritmo de planeación motriz $\iff \mathcal{C}$ es contráctil.

Farber, '03

Existe un algoritmo de planeación motriz $\iff \mathcal{C}$ es contráctil.

Observaciones:

- Ser contráctil se relaciona con la **conexidad por trayectorias**, la propiedad de poder unir cualquier par de puntos.
- El algoritmo es la **contracción** de $\mathcal{C}$ en alguno de sus puntos.
- Si $\mathcal{C}$ es contráctil, el algoritmo buscado es *sencillo*.

Farber, '03

Existe un algoritmo de planeación motriz $\iff \mathcal{C}$ es contráctil.

Observaciones:

- Ser contráctil se relaciona con la **conexidad por trayectorias**, la propiedad de poder unir cualquier par de puntos.
- El algoritmo es la **contracción** de $\mathcal{C}$ en alguno de sus puntos.
- Si $\mathcal{C}$ es contráctil, el algoritmo buscado es *sencillo*.

.... pero los espacios $\mathcal{C}$ rara vez son contráctiles (ver páginas atrás)
y el algoritmo puede ser *inestable*.

Farber, '03

Existe un algoritmo de planeación motriz $\iff \mathcal{C}$ es contráctil.

Observaciones:

- Ser contráctil se relaciona con la **conexidad por trayectorias**, la propiedad de poder unir cualquier par de puntos.
- El algoritmo es la **contracción** de $\mathcal{C}$ en alguno de sus puntos.
- Si $\mathcal{C}$ es contráctil, el algoritmo buscado es *sencillo*.

.... pero los espacios $\mathcal{C}$ rara vez son contráctiles (ver páginas atrás)
y el algoritmo puede ser *inestable*.

[Farber, '04] La **complejidad topológica** $TC(\mathcal{C})$ mide tales inestabilidades.

Complejidad Topológica

$TC(\mathcal{C})$ = menor número n tal que existe recubrimiento

$$\bigcup_{i=1}^n U_i = \mathcal{C} \times \mathcal{C},$$

para los que existen funciones continuas

$$\eta_i : U_i \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}), \quad \gamma \circ \eta_i = 1.$$

Aquí, η_i son algoritmos **locales**.

Si no existe tal n , se dice que $TC(\mathcal{C}) = \infty$.

Complejidad Topológica

$TC(\mathcal{C})$ = menor número n tal que existe recubrimiento

$$\bigcup_{i=1}^n U_i = \mathcal{C} \times \mathcal{C},$$

para los que existen funciones continuas

$$\eta_i : U_i \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C}), \quad \gamma \circ \eta_i = 1.$$

Aquí, η_i son algoritmos **locales**.

Si no existe tal n , se dice que $TC(\mathcal{C}) = \infty$.

Naturalidad: si $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}$, entonces $TC(\mathcal{C}) = TC(\mathcal{D})$.

En particular, si $\mathcal{C}$ es **contráctil**, $TC(\mathcal{C}) = 1$.

Complejidad Topológica: ejemplos

- $TC(S^n) = 2$, n impar.
- $TC(S^n) = 3$, n par.

Relacionado con campos
vectoriales en esferas

Complejidad Topológica: ejemplos

- $TC(S^n) = 2$, n impar.
- $TC(S^n) = 3$, n par.

Relacionado con campos vectoriales en esferas

Género de Schwarz, categoría de Lusternik-Schnirelmann, divisores de cero en $H^*(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$.
M. Farber, M. Grant, S. Yuzvinsky,

- $TC(F_n(\mathbb{R}^{2k})) = 2n - 2$.
- $TC(F_n(\mathbb{R}^{2k+1})) = 2n - 1$.
- $TC(S^2) = 3$
- $TC(T^n) = n + 1$
- $TC(SO(3)) = 4$

Complejidad Topológica: ejemplos

- $TC(S^n) = 2$, n impar.
- $TC(S^n) = 3$, n par.

Relacionado con campos
vectoriales en esferas

Complejidad Topológica: ejemplos

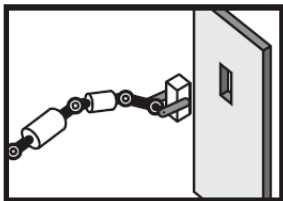
- $TC(S^n) = 2$, n impar.
- $TC(S^n) = 3$, n par.

Relacionado con campos
vectoriales en esferas

Género de Schwarz, categoría
de Lusternik-Schnirelmann,
divisores de cero en $H^*(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$.
M. Farber, M. Grant, S.
Yuzvinsky,

■ XXXXXXXX

Cinemática Inversa



Ejecutor final es una herramienta al final del brazo robot.

(prensa, desarmador, cautín,...)

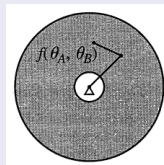
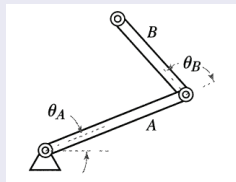
Cinemática directa: dado un brazo robótico describir las posibles posiciones del ejecutor final.

El **espacio operacional** $\mathcal{W}$ es la región donde se mueve el ejecutor final.

El **espacio operacional** $\mathcal{W}$ es la región donde se mueve el ejecutor final.

Ejemplo

El brazo con dos uniones rotacionales y su espacio operacional:



La posición del ejecutor final depende *continuamente* de las configuraciones del sistema mecánico.

Respuesta: la posición del ejecutor es una función continua

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{W},$$

llamada **función de ejecutor final** ([Gottlieb, '88]).

La posición del ejecutor final depende *continuamente* de las configuraciones del sistema mecánico.

Respuesta: la posición del ejecutor es una función continua

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{W},$$

llamada **función de ejecutor final** ([Gottlieb, '88]).

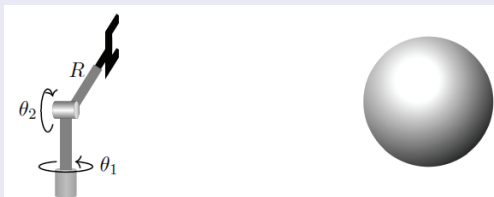
Ejemplo

Para el brazo con dos uniones rotacionales $F : S^1 \times S^1 \rightarrow A$ está dada por

$$F(\theta_A, \theta_B) = (l_1 \cos \theta_A + l_2 \cos(\theta_A + \theta_B), l_1 \sin \theta_A + l_2 \sin(\theta_A + \theta_B))$$

Ejemplo

El brazo con dos uniones rotacionales **perpendiculares** y su espacio operacional:



Función de ejecutor final $F : S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$

$$F(\theta_1, \theta_2) = (R \cos \theta_1 \cos \theta_2, R \sin \theta_1 \cos \theta_2, R \sin \theta_2)$$

Si el brazo tiene n uniones rotacionales y nos interesa la **orientación** del ejecutor final:

$$\mathcal{W} = SO(3)$$

$$\mathcal{C} \cong T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$$

Si el brazo tiene n uniones rotacionales y nos interesa la **orientación** del ejecutor final:

$$\mathcal{W} = SO(3)$$

$$\mathcal{C} \cong T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$$

La función del ejecutor final

$$F : T^n \longrightarrow SO(3)$$

asocia a cada sucesión de valores de las rotaciones, la posición y orientación del ejecutor final.

Cinemática Inversa: determinar si el ejecutor final puede o no alcanzar cierta posición dada.

En términos topológicos: ¿existe función continua η tal que $F \circ \eta = 1$?

$$SO(3) \xrightarrow{\eta} T^n \xrightarrow{F} SO(3)$$

$$A \longmapsto \eta(A) \longmapsto F(\eta(A)) = A$$

Cinemática Inversa: determinar si el ejecutor final puede o no alcanzar cierta posición dada.

En términos topológicos: ¿existe función continua η tal que $F \circ \eta = 1$?

$$SO(3) \xrightarrow{\eta} T^n \xrightarrow{F} SO(3)$$

$$A \longmapsto \eta(A) \longmapsto F(\eta(A)) = A$$

Observación: η existe si $n \gg 0$ y/o los segmentos del brazo son muy largos pero en general no existe η .

Proposición

No existe inversa continua η

Proposición

No existe inversa continua η

Dem. Supongamos que existe η :

$$SO(3) \xrightarrow{\eta} T^n \xrightarrow{\kappa} SO(3)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_1 \nearrow$

Por naturalidad del grupo fundamental π_1 :

$$\pi_1(SO(3)) \xrightarrow{\eta_*} \pi_1(T^n) \xrightarrow{\kappa_*} \pi_1(SO(3))$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_1 \nearrow$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\eta_*} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\kappa_*} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_1 \nearrow$

Lo cual no puede ser pues $\mathbb{Z}^n$ no tiene elementos no cero de orden finito. ■

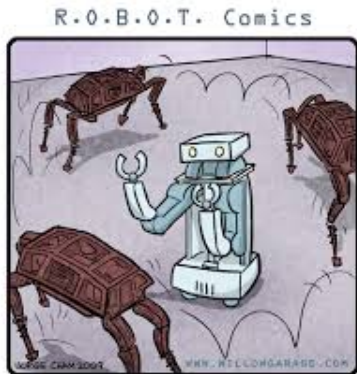
- La demostración anterior es válida por la naturalidad del grupo fundamental y la aparición de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- La demostración anterior es válida por la naturalidad del grupo fundamental y la aparición de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Si el espacio de configuración o el operacional cambian no se puede usar la misma prueba.

- La demostración anterior es válida por la naturalidad del grupo fundamental y la aparición de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- Si el espacio de configuración o el operacional cambian no se puede usar la misma prueba.
- Si la orientación no importa, la función del ejecutor $F : T^n \rightarrow S^2$ tampoco tiene una inversa continua.

- 1 Adams, C., Franzosa, R., **Introduction to Topology, Pure and Applied**, Pearson Prentice Hall, 2008.
- 2 Farber, M., **Invitation to Topological Robotics**, Zurich Lectures in Advanced Mathematics, EMS, 2008.
- 3 González, J., Guillemard, M., **Algunas Aplicaciones de la Topología Algebraica**.
- 4 Ghrist, R., **Elementary Applied Topology**, 2014.
- 5 Gottlieb, D.H., **Topology and the robot arm**, Acta Appl. Math., 11 **2**, 117-121, 1988.

Gracias!



"SIT, BOY, SIT! SIT, I SAY,
SI... OH, FORGET IT."