

Homología celular

Miguel A. Maldonado

Resumen

(breves) Notas sobre homología celular; específicamente cálculos de homología entera de superficies compactas y espacios proyectivos.

1 Homología de superficies compactas

Para X espacio topológico consideramos el resultado de pegar una n -celda:

$$Y := X \cup_f e^n,$$

donde e^n es espacio homeomorfo al n -disco abierto y $f: S^{n-1} \rightarrow X$ es la función de adjunción. Algunas propiedades:

- a) Tomamos la inclusión $X \hookrightarrow Y$ y notamos que tenemos un homeomorfismo $Y/X \cong S^n$, obtenido del cociente usual de un disco por su frontera.
- b) La función de adjunción $f: S^{n-1} \rightarrow X$ induce una función de la forma

$$\hat{f}: D^n \rightarrow Y$$

cuya restricción al interior de D^n es un homeomorfismo.

Teorema 1.0.1 (Proposition 6.11 en [1]). *Si X se obtiene al adjuntar un número finito de celdas a A , entonces la función cociente $p: X \rightarrow X/A$ induce un isomorfismo de la forma*

$$H_*(p): H_*(X, A) \rightarrow H_*(X/A, \{A\}) \cong \tilde{H}_*(X/A)$$

Teorema 1.0.2 (Prop. 6.28 en [1]). *Para $X, Y = X \cup_f e^n$ como antes se tiene la siguiente relación entre sus correspondientes homología reducidas:*

a) Si $q \neq n, n-1$, $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(Y)$

b) En otro caso se tiene una sucesión exacta de la forma:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{f_{n-1}} \tilde{H}_{n-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y) \rightarrow 0,$$

donde f_{n-1} es el homomorfismo inducido por la función de adjunción a nivel de homología.

Dem. Consideramos las parejas (Y, X) , (D^n, S^{n-1}) y sus respectivas sucesiones exactas largas en homología, relacionadas a través de la función f y su extensión $\hat{f}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \tilde{H}_q(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, X) & \longrightarrow \tilde{H}_{q-1}(X) \longrightarrow \cdots \\ & \uparrow f_* & & \uparrow \hat{f}_* & & \uparrow \cong & \uparrow f_{q-1} \\ \cdots \longrightarrow & \tilde{H}_q(S^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(D^n) & \longrightarrow & H_q(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Analizaremos este diagrama tomando en cuenta las propiedades mencionadas en la página anterior. Dado que $Y/X \cong S^n$ y que $H_*(Y, X) \cong H_*(Y/X, \{\text{pt}\}) \cong \tilde{H}_*(Y/X)$ se obtiene que

$$H_q(Y, X) \cong \tilde{H}_q(Y/X) \cong \tilde{H}_q(S^n) \cong H_q(D^n, S^{n-1})$$

Así, si $q \neq n, n-1$ entonces $H_q(Y, X)$ es trivial y del diagrama de arriba se obtienen isomorfismos $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(Y)$, lo que prueba la primera afirmación.

Por otro lado, el renglón superior en el diagrama $(*)$ tiene la forma:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(Y) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(Y, X) \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & \tilde{H}_{n-1}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(Y) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(Y, X) = 0 \longrightarrow 0 \end{array}$$

Finalmente, con los isomorfismos mencionados antes, la sucesión anterior puede ser expresada como:

$$\begin{array}{ccccccccc} \tilde{H}_n(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(Y) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(Y, X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{n-1}(Y) \\ & & & & \uparrow \cong & & \uparrow & & \\ & & & & \tilde{H}_n(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) & & \end{array}$$

de donde se obtiene la sucesión buscada. ■

Superficies. Recordemos que toda superficie compacta S puede considerarse como un espacio de adjunción de la forma:

$$S = \left(\bigvee_n S^1 \right) \cup_f e^2,$$

donde la función de adjunción $f: S^1 \rightarrow \bigvee_n S^1$ está representada por la palabra reducida w_S asociada a S . Usando el resultado de arriba con $X = \bigvee_n S^1$, $Y = S$ se obtiene que $\tilde{H}_q(S)$ es trivial para $q \geq 3$; para las dimensiones bajas consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \boxed{\tilde{H}_2(S)} \longrightarrow \tilde{H}_1(S^1) \xrightarrow{f_1} \tilde{H}_1\left(\bigvee_n S^1\right) \longrightarrow \boxed{\tilde{H}_1(S)} \longrightarrow 0$$

Las homología señaladas dependen de si S es superficie orientable o no, y de la palabra reducida w_S asociada.

1.1 Superficie orientable S_g , de género g .

En este caso la palabra asociada es:

$$w_S = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

y determina a la función de adjunción f , la cual es trivial pues en notación aditiva se tiene:

$$\begin{aligned} [w_S] &= [a_1] + [b_1] - [a_1] - [b_1] + \cdots + [a_g] + [b_g] - [a_g] - [b_g] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto implica que, en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_2(S_g) \longrightarrow \tilde{H}_1(S^1) \xrightarrow{f_1} \tilde{H}_1\left(\bigvee_{2g} S^1\right) \longrightarrow \tilde{H}_1(S_g) \longrightarrow 0$$

el homomorfismo f_1 es trivial; es decir, $\text{Ker}(f_1) = \tilde{H}_1(S^1)$ y $\text{Im}(f_1) = 0$. De esto se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2(S_g) &\cong \tilde{H}_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \\ \tilde{H}_1(S_g) &\cong \tilde{H}_1\left(\bigvee_{2g} S^1\right) \cong \mathbb{Z}^{2g} \end{aligned}$$

Es decir,

$$H_q(S_g) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & q = 1 \\ \mathbb{Z}, & q = 2 \\ 0, & q \geq 3 \end{cases}$$



Observemos que se obtienen cálculos similares para el caso de un anillo conmutativo.

1.2 Superficie no orientable N_h , de género h .

Aquí la palabra asociada es

$$w_S = a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_h a_h,$$

que en notación aditiva tiene la forma:

$$\begin{aligned} [w_S] &= [a_1] + [a_1] + [a_2] + [a_2] + \cdots + [a_h] + [a_h] \\ &= 2[a_1] + 2[a_2] + \cdots + 2[a_h] \\ &= 2\left([a_1] + [a_2] + \cdots + [a_h]\right) \end{aligned}$$

Así, en la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \boxed{\tilde{H}_2(N_h)} \longrightarrow \tilde{H}_1(S^1) \xrightarrow{f_1} \tilde{H}_1\left(\bigvee_h S^1\right) \longrightarrow \boxed{\tilde{H}_1(N_h)} \longrightarrow 0$$

el homomorfismo f_1 tiene la forma:

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}^h \\ 1 &\longmapsto 2(1, 1, \dots, 1) = (2, 2, \dots, 2) \end{aligned}$$

Haremos uso del siguiente resultado que permite hacer cambios de base para expresar vectores/transformaciones lineales a modo.

Lema 1.2.1. *Si $\beta = \{b_i\}_{i=1}^n$ es una base para un espacio vectorial entonces $\beta' = \{b', b_2, b_3, \dots, b_n\}$, con $b' = \sum_{i=1}^n b_i$, es también una base para el espacio vectorial.*

Dem. Consideremos la combinación lineal $a_1 b' + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$ y notemos que de ella se obtiene

$$a_1 b_1 + (a_1 + a_2) b_2 + \dots + (a_1 + a_{n-1}) b_{n-1} + (a_1 + a_n) b_n = 0$$

Puesto que β es base se obtiene $a_i = 0, \forall i$, por lo que β' es l.i. Por otro lado, consideremos $v = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ y notemos que la podemos re-escribir mediante

$$v = a_1 b' + (a_2 - a_1) b_2 + (a_3 - a_1) b_3 + \dots + (a_n - a_1) b_n$$

lo que muestra que β' genera al espacio vectorial en cuestión. ■

Tomando la base estándar $e_1, \dots, e_h$ de $\mathbb{R}^h$ y procediendo como en la prueba anterior obtenemos

$$(2, 2, \dots, 2) = 2e_1 + 2e_2 + \dots + 2e_n = 2e' + (2-2)e_2 + \dots + (2-2)e_n$$

donde $e' = \sum_{i=1}^h e_i$. Así podemos expresar a f_1 como

$$\begin{aligned} f_1(1) &= 2(1, 0, \dots, 0) \\ &= (2, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Es decir, f_1 puede considerarse como multiplicación por 2 en la primera coordenada, lo cual es un morfismo inyectivo. De aquí se sigue que $\tilde{H}_2(N_h)$ es trivial y

$$\tilde{H}_1(N_h) \cong \tilde{H}_1\left(\bigvee_h S^1\right) / \text{Im}(f_1) \cong \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}{2\mathbb{Z} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{h-1}$$

Esto es:

$$H_q(N_h) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{h-1}, & q = 1 \\ 0, & q \geq 2 \end{cases} \quad \triangleleft$$



De los cálculos anteriores se sigue que ninguna superficie orientable es homeomorfa a una no orientable debido a la diferencia entre sus grupos de homología en dimensión 2.

Comentario final: la homología de la superficie no orientable tiene otra descripción al considerar otros coeficientes:

$$H_q(N_h; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & q = 0 \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^h, & q = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & q = 2 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad H_q(N_h; \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & q = 0 \\ \mathbb{Q}^{h-1}, & q = 1 \\ 0, & q \geq 2 \end{cases}$$

(Tomado de [1, p.176])

2 Homología celular

Sea X complejo celular finito con $X = \cup_{i=0}^N X_i$, donde el n -esqueleto X_n se obtiene de X_{n-1} al adjuntar n -celdas a través de funciones de pegado $f_i : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$. Denotemos por α_n el número de n -células de X y notemos que $X_n/X_{n-1} \simeq \bigvee_{\alpha_n} S^n$. En consecuencia, $\tilde{H}_q(X_n/X_{n-1}) = 0$ si $q \neq n$, y $\tilde{H}_n(X_n/X_{n-1}) = \mathbb{Z}^{\alpha_n}$.

Algunas propiedades

1. $H_q(X_n) = 0$ para $q > n$.

Dem. Del Teorema 1.0.2 sabemos que si $q \neq n, n-1$ entonces $H_q(X_n) \cong H_q(X_{n-1})$; así, si $q > n$ se tienen los isomorfismos

$$H_q(X_n) \cong H_q(X_{n-1}) \cong H_q(X_{n-2}) \cong H_q(X_{n-3}) \cong \cdots \cong H_q(X_0) = 0$$

como se quería.

2. $H_q(X) \cong H_q(X_{n+1})$ si $q \leq n$.

Dem. Con un argumento similar al anterior, si $q \neq n+1, n+2$ se tiene que $H_q(X_{n+1}) \cong H_q(X_{n+2})$; en particular, si $q \leq n$ se tienen

$$H_q(X_{n+1}) \cong H_q(X_{n+2}) \cong \cdots \cong H_q(X_N) = H_q(X)$$

como se quería probar.

3. La parte no trivial de la sucesión exacta larga asociada a la pareja (X_n, X_{n-1}) está dada por

$$0 \rightarrow H_n(X_n) \rightarrow H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_n) \rightarrow 0$$

la cual será de gran interés para lo que haremos adelante. ◀

Consideremos las sucesiones exactas largas en homología asociadas a las parejas (X_{n+1}, X_n) , (X_n, X_{n-1}) , (X_{n-1}, X_{n-2}) mostradas en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & H_n(X^{n+1}) \approx H_n(X) & & \\
 & & 0 & \searrow & \nearrow & & \\
 & & & H_n(X^n) & & & \\
 & \nearrow \partial_{n+1} & & \searrow j_n & & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \longrightarrow \cdots \\
 & & & & \searrow \partial_n & \nearrow j_{n-1} & \\
 & & & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & \\
 & & & & \nearrow 0 & &
 \end{array}$$

donde $d_{n+1} := j_n \circ \partial_{n+1}$, $d_n := j_{n-1} \circ \partial_n$. Hagamos

$$Cell_n(X) := H_n(X_n, X_{n-1}) \cong \tilde{H}_n(X_n/X_{n-1}) = \mathbb{Z}^{\alpha_n}$$

y notemos que $d_n : Cell_n(X) \rightarrow Cell_{n-1}(X)$.

Lema 2.0.1. $\{(Cell_n(X), d_i)\}_{i \geq 0}$ es un complejo de cadenas, llamado el complejo de cadenas celulares de X .

Dem. Directo de la definición se obtiene:

$$d_n \circ d_{n+1} := (j_{n-1} \circ \partial_n) \circ (j_n \circ \partial_{n+1}) = j_{n-1} \circ (\partial_n \circ j_n) \circ \partial_{n+1} = 0$$

como se quería probar. ■

Denotemos por $H_n^{CW}(X)$ a la homología del complejo de cadenas celulares de X

Teorema 2.0.2. Si $H_n(X)$ denota la homología singular de X espacio celular, entonces $H_n^{CW}(X) \cong H_n(X), \forall n$.

Dem. hecho en clase. ■

El resultado anterior nos permite hacer cálculos de homología de una manera más eficiente; lo usaremos para el caso de espacios proyectivos. Antes algunas consecuencias:

1. Si X no tiene n -celdas, $H_n(X) = 0$.
2. Supongamos que X tiene k n -celdas y tomemos el operador frontera

$$d_n : \text{Cell}_n(X) := H_n(X_n, X_{n-1}) \rightarrow \text{Cell}_{n-1}(X)$$

Notemos que el dominio es libre en k generadores; de aquí que $\ker d_n$ es libre a lo más en k generadores y lo mismo pasa para $H_n(X) = \ker d_n / \text{imd}_{n+1}$.

3. Si X no tiene celdas en dimensiones adyacentes, entonces $H_n(X)$ es libre con base en correspondencia biyectiva con sus n -celdas.

3 Homología de espacios proyectivos



Remitir a esta página para recordar definiciones de espacios proyectivos.

El **espacio proyectivo real** $\mathbb{RP}^n = S^n / \mathbb{Z}_2$, mediante la acción antipodal, es homeomorfo a los siguientes espacios

1. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \bar{x} \sim \lambda \bar{x}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. El espacio cociente $D^n / \sim$, donde

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \bar{y}, & \bar{x} \in \text{int}(D^n) \\ \bar{x} = -\bar{y}, & \bar{x} \in \partial(D^n) \cong S^{n-1} \end{cases}$$

3. Espacio celular $\mathbb{RP}^{n-1} \cup_{q_{n-1}} e^n$, donde $q_{n-1} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$ es la función cociente usual.

De esta última descripción se obtiene la descomposición celular estándar de

$$\mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^{n-1} \cup e^n$$

con una celda en cada dimensión. Para el caso infinito se tiene

$$\mathbb{RP}^\infty = \bigcup_n \mathbb{RP}^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^{n-1} \cup e^n \cup \dots$$

El **espacio proyectivo complejo** $\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/S^1$, mediante multiplicación compleja, es homeomorfo a los siguientes espacios

1. El espacio cociente $D^{2n} / \sim$, donde

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = y, & \bar{x} \in \text{int}(D^{2n}) \\ x = \lambda y, & x \in \partial(D^{2n}) \cong S^{2n-1}, \lambda \in S^1 \end{cases}$$

2. Espacio celular $\mathbb{CP}^{n-1} \cup_{q_{n-1}} e^{2n}$, donde $q_{n-1} : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$ es la función cociente usual.

Al igual que antes, de esto se desprende la descomposición celular estándar

$$\mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$$

con una celda en cada dimensión par. Para el caso infinito se tiene

$$\mathbb{CP}^\infty = \bigcup_n \mathbb{CP}^n = e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup e^6 \cup \dots$$

Por los últimos comentarios de la sección anterior, obtener la homología de $\mathbb{CP}^n$ es inmediato

Lema 3.0.1. *La homología del espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ está dada por*

$$H_i(\mathbb{CP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 2, 4, \dots, 2n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Dem. Por la descomposición celular de $\mathbb{CP}^n$ su complejo de cadenas celulares tiene la forma siguiente:

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_4} 0 \xrightarrow{d_3} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_2} 0 \xrightarrow{d_1} 0$$

De aquí que d_i es trivial $\forall i \geq 1$ y el resultado se obtiene. ■

De igual manera se obtiene una descripción celular para el caso cuaterniónico

$$\mathbb{HIP}^n = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \cdots \cup e^{4n}$$

y por tanto $\mathbb{HIP}^\infty = \cup_n \mathbb{HIP}^n = e^0 \cup e^4 \cup e^8 \cup \cdots$.

Por un argumento similar al caso complejo se obtiene el siguiente cálculo

Lema 3.0.2. *La homología del espacio proyectivo cuaterniónico $\mathbb{HIP}^n$ está dada por*

$$H_i(\mathbb{HIP}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, 4, 8, \dots, 4n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Para obtener la homología del espacio proyectivo real debemos antes dar algunas palabras sobre el grado local. Supongamos que $f : S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$, es tal que para algún punto $y \in S^n$, la preimagen $f^{-1}(y) = x_1, x_2, \dots, x_m$. Para vecindades disjuntas $U_i \ni x_i$ tomamos $V := f(U_i), \forall i$ y notamos que es vecindad de y . Tomamos el homomorfismo inducido

$$H_n(S^n) \cong H_n(U_i, U_i \setminus x_i) \xrightarrow{(f|_{U_i})_*} H_n(V, V \setminus y) \cong H_n(S^n),$$

donde los isomorfismos se obtienen por escisión. De esto definimos el **grado local de f en x_i** como $\deg(f|_{x_i}) := \deg((f|_{U_i})_*)$. Debido a la

Proposición 2.30 en [2], el grado local permite calcular el grado de una función al establecer que $\deg(f) = \sum_{i=1}^m \deg(f|_{X_i})$

Lo anterior me permite describir el operador frontera celular

Lema 3.0.3. *Para un complejo celular X consideramos el operador frontera celular $d_n : \text{Cell}_n(X) \rightarrow \text{Cell}_{n-1}(X)$. Entonces*

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_{\beta} d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1},$$

donde $d_{\alpha\beta}$ es el grado de la composición

$$S_\alpha^{n-1} \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_{n-1} \rightarrow X_{n-1}/(X_{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}) \cong S_\beta^{n-1}$$

obtenida de la función de pegado y de la función cociente que colapsa $(X_{n-1} \setminus e_\beta^{n-1})$ a un punto.

Dem. Véase [2, p.140]. ■

Lema 3.0.4. *La homología del espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$ depende de la paridad de su dimensión y está dada como sigue*

$$H_i(\mathbb{RP}^{par}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0 \\ \mathbb{Z}_2, & i \text{ impar}, 0 < i < n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{RP}^{impar}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0, n \\ \mathbb{Z}_2, & i \text{ impar}, 0 < i < n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Dem. Recordemos que $\mathbb{RP}^n = \mathbb{RP}^{n-1} \cup_{\varphi} e^n$, donde e^n es la única n -celda y se adjunta mediante $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{n-1}$. De aquí se tiene que el complejo de cadenas celulares tiene la forma $\text{Cell}_i(\mathbb{RP}^n) = \mathbb{Z}, \forall i$; resta considerar a los operadores frontera.

Dado que $\mathbb{RP}^{k-1}$ tiene una única $(k-1)$ -celda e^{k-1} se sigue que

$\mathbb{RP}^{k-1} \setminus e^{k-1} \cong \mathbb{RP}^{k-2}$; además tenemos

$$\rho : \mathbb{RP}^{k-1} / (\mathbb{RP}^{k-1} \setminus e^{k-1}) \cong \mathbb{RP}^{k-1} / \mathbb{RP}^{k-2} \cong S^{k-1} \quad (1)$$

Finalmente, calcularemos el grado de la función

$$S^{k-1} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{RP}^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{RP}^{k-1} / \mathbb{RP}^{k-2} \cong S^{k-1}.$$

Hagamos $S^{k-1} - S^{k-2} = N \sqcup S$ y notemos que las restricciones $(q \circ \varphi)|_N$, $(q \circ \varphi)|_S$ son homeomorfismos. Para la función antipodal a tenemos que $(q \circ \varphi)|_N = a \circ (q \circ \varphi)|_S$ y viceversa.

Para el homeomorfismo (1) y $\alpha = [\mathbb{RP}^{k-2}] \in \mathbb{RP}^{k-1} / \mathbb{RP}^{k-2}$ (un punto en cociente tomamos $y \in S^{k-1} \setminus \rho(\alpha)$ para obtener

$$(q \circ \varphi)^{-1}(y) = \{x_1, x_2\} \subseteq S^{k-1}$$

donde x_1, x_2 son antipodales. SPG supongamos $x_1 \in N, x_2 \in S$ y N, S son vecindades para tales puntos. Por el lema (3.0.3) se tiene que

$$\begin{aligned} \Rightarrow \deg(q \circ \varphi) &= \deg((q \circ \varphi)|_{x_1}) + \deg((q \circ \varphi)|_{x_2}) \\ &= \deg(q \circ \varphi)|_N + \deg(q \circ \varphi)|_S \\ &= \deg(a) \cdot \deg(q \circ \varphi)|_S + \deg(q \circ \varphi)|_S \\ &= (-1)^k \deg(q \circ \varphi)|_S + \deg(q \circ \varphi)|_S \end{aligned}$$

Dado que $(q \circ \varphi)|_S$ es homeomorfismo $\deg(q \circ \varphi)|_S = \pm 1$. De aquí se obtiene dos casos:

1. Si $\deg(q \circ \varphi)|_S = 1$

$$\Rightarrow \deg(q \circ \varphi) = 1 + (-1)^k = \begin{cases} 2, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

2. Si $\deg(q \circ \varphi)|_S = -1$

$$\Rightarrow \deg(q \circ \varphi) = -1 + (-1)^{k+1} = \begin{cases} -2, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

De esto se obtienen dos casos

$$d_k(e^k) = \begin{cases} 2e^{k-1}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases} \quad d_k(e^k) = \begin{cases} -2e^{k-1}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

Finalmente, dado que $(-2)\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$, obtenemos $d_k(e^k) = \begin{cases} 2e^{k-1}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$.

El resultado buscado se obtiene al escribir los complejos de cadenas para ambos casos y calculando homología. ■

Referencias

- [1] Felix, I., Tanré, **Topologie algebrique**, Dunod, 2010.
- [2] Hatcher, A., **Algebraic Topology**, Cambridge University Press, 2002.