

Topología de Conjuntos

presentación de curso

Miguel A. Maldonado
Unidad Académica de Matemáticas, UAZ
`mmaldonado@uaz.edu.mx`

Semestre agosto-diciembre 2026

Contenido

- 1 ¿Qué es Topología?
- 2 ¿Qué se estudia en Topología?
- 3 ¿Por qué estudiar Topología?
- 4 ¿Cómo se trabaja en Topología?
- 5 ¿Qué propiedades se estudian en Topología?
- 6 ¿Dónde estudiar Topología?
- 7 Objetivos generales



Lo que **no** es Topología



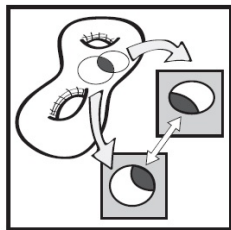
Lo que **no** es Topología



Lo que **sí** es Topología

Es un tipo de Geometría que estudia la *forma* de los objetos matemáticos permitiendo que sean estirados y contraídos pero no rotos.

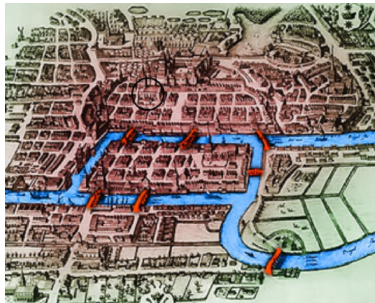
- Área **joven** de las matemáticas: el concepto de espacio topológico se debe a J.B. Listing (1847).
- Junto con **Álgebra** y **Análisis** forman las tres áreas principales de las matemáticas puras.
- Ofrece estudio **cualitativo** de los objetos.
- Estudia propiedades **robustas** (= no cambian con pequeñas variaciones continuas), esto hace que tengas diversas aplicaciones.



Pequeña historia sobre uno de los orígenes de la Topología



Konigsberg fue la antigua capital de Prusia del Este hasta 1945 cuando cambió su nombre a Kaliningrado.

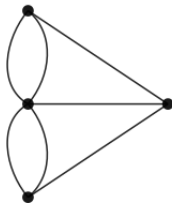


La ciudad es famosa porque cuenta con siete puentes de impresionante arquitectura que cruzan el río Pregel. Los ciudadanos tenían un interés en realizar una caminata a lo largo del pueblo, cruzando los siete puentes una sola vez, partiendo y regresando a la iglesia que se encuentra al norte.

Pregunta: ¿es posible hacer un tal recorrido?



En 1736 L. Euler escribió sobre este problema dando con ello grandes aportaciones a la Topología a través de la solución. El primer acierto fue representar cada porción de la ciudad con un vértice y cada puente por una arista que une a los vértices.



Este modelo enfatiza que la disposición de las regiones, así como la posición y longitud de los puentes, son totalmente irrelevantes...

Lo que es importante es la manera en que las regiones se **conectan** entre sí a través de los puentes.



Con la gráfica anterior el problema se traduce en poder recorrer todas aristas de la gráfica, iniciando y terminando en el mismo vértice.

L. Euler dió la solución al problema en 1736: *es imposible recorrer cada una de las aristas de la gráfica una sola vez y regresar al mismo vértice donde se inició.*

El planteamiento y la solución al problema representó un nuevo enfoque para abordar problemas haciendo uso de las matemáticas. En particular, la idea de fijarse en la manera en que se relacionan los objetos, sin importar longitudes o áreas, puede considerarse como el nacimiento de la Topología. ■



¿Qué se estudia en Topología?

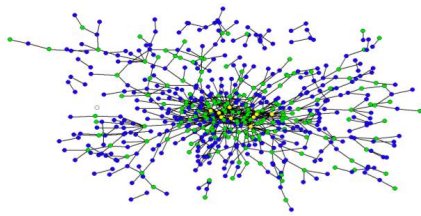
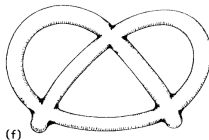
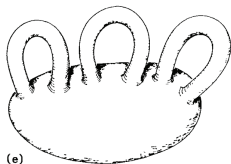




Los objetos de estudio son llamados **espacios topológicos** y son conjuntos con cierta noción de "distancia" entre sus elementos.

Ejemplos:

- Objetos de la geometría: curvas, planos, superficies, etc.
- Espacios euclidianos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc.
- Conjuntos que surgen de aplicaciones o de otras áreas.



Un ejemplo especial

Un **espacio métrico** M es un conjunto con una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{función distancia})$$

que satisface:

$$d(x, y) \geq 0,$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$



Un ejemplo especial

Un **espacio métrico** M es un conjunto con una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{función distancia})$$

que satisface:

$$d(x, y) \geq 0,$$

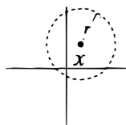
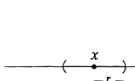
$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Ejemplos:

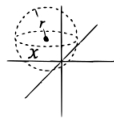
- $M = \mathbb{R}^2$,

$$d(\bar{x}, \bar{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

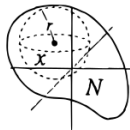
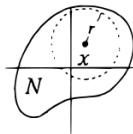
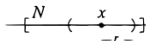


- $M = \mathbb{R}$,

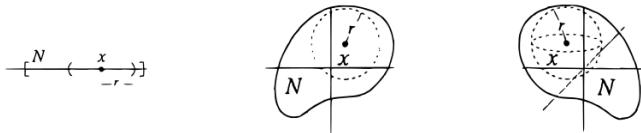
$$d(x, y) := |x - y|$$



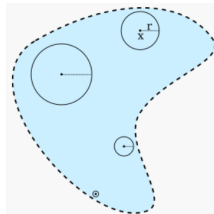
En un espacio métrico se definen nociones de cercanía a través de la noción de **vecindad**:



En un espacio métrico se definen nociones de cercanía a través de la noción de **vecindad**:



Se dice que $U \subseteq M$ es **abierto**
 $\forall x \in U \exists N_x, N_x \subset U$



Notemos que los intervalos cerrados y las bolas cerradas no satisfacen la definición anterior.



Los abiertos de un espacio métrico tienen cierta "aritmética" interesante:

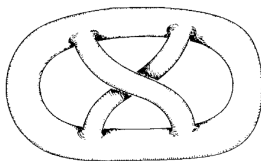
- 1 La unión de abiertos es también un abierto
- 2 La intersección de dos abiertos es también un abierto.



Los abiertos de un espacio métrico tienen cierta "aritmética" interesante:

- 1 La unión de abiertos es también un abierto
- 2 La intersección de dos abiertos es también un abierto.

Un **espacio topológico** es un conjunto que también tiene esta aritmética pero sin la presencia de una métrica.

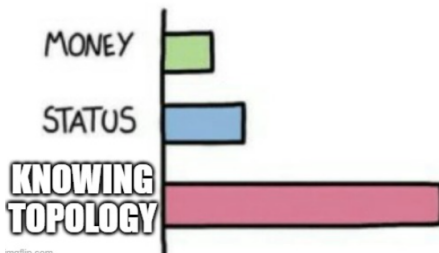


¿Por qué estudiar Topología?





WHAT GIVES PEOPLE FEELINGS OF POWER



memlin.com



Los objetos de estudio de la topología, así como sus métodos y conceptos, **generalizan** resultados de varias áreas de las matemáticas:

- **Análisis**: continuidad de funciones, convergencia de sucesiones.
- **Cálculo**: teorema del valor intermedio, teorema del valor extremo.
- **Geometría**: noción de cercanía sin una métrica.



Los objetos de estudio de la topología, así como sus métodos y conceptos, **generalizan** resultados de varias áreas de las matemáticas:

- **Análisis**: continuidad de funciones, convergencia de sucesiones.
- **Cálculo**: teorema del valor intermedio, teorema del valor extremo.
- **Geometría**: noción de cercanía sin una métrica.

Y se relaciona con otras tantas...



¿Cómo se trabaja en Topología?



La Geometría Analítica distingue objetos geométricos a través de sus **ecuaciones** aunque los objetos sean muy parecidos:

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \neq \{(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1\}$$



La Geometría Analítica distingue objetos geométricos a través de sus **ecuaciones** aunque los objetos sean muy parecidos:

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \neq \{(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1\}$$

En Topología dos objetos son **equivalentes** si pueden deformarse uno en el otro de manera **continua**.

Continuo significa sin cortar, ni razgar; se puede apachurrar, alargar, cambiar posición.



PICK THE DONUT

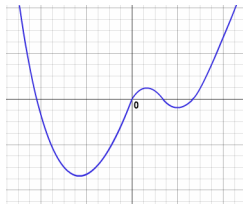
TOPOLOGISTS



Las relaciones entre espacios topológicos se expresan mediante **funciones**:

$$f : X \longrightarrow Y$$

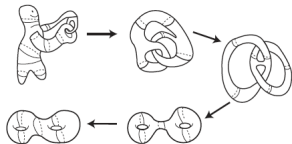
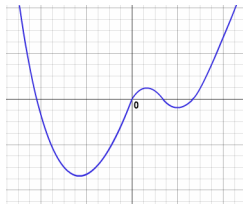
Se dice que f es **continua** si puntos cercanos en X tienen imágenes cercanas en Y .



Las relaciones entre espacios topológicos se expresan mediante **funciones**:

$$f : X \longrightarrow Y$$

Se dice que f es **continua** si puntos cercanos en X tienen imágenes cercanas en Y .



X, Y son **equivalentes** si existen

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f^{-1} : Y \longrightarrow X$$

funciones continuas.

Notación: $X \cong Y$



¿Qué propiedades se estudian en Topología?



Las **propiedades topológicas** son aquellas que no cambian bajo deformaciones continuas

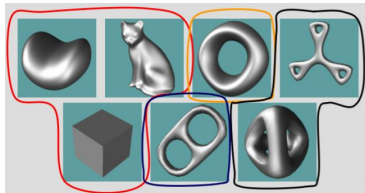
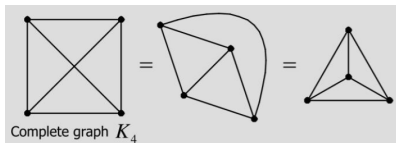


Las **propiedades topológicas** son aquellas que no cambian bajo deformaciones continuas; en particular, si $X \cong Y$ entonces tienen las mismas propiedades.



Las **propiedades topológicas** son aquellas que no cambian bajo deformaciones continuas; en particular, si $X \cong Y$ entonces tienen las mismas propiedades.

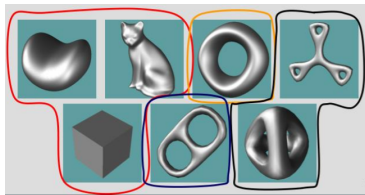
Ejemplos: el número de partes (**conexidad/conectividad**), tener orillas, ser *abierto*, ser cerrado y acotado (**compacto**), número de "hoyos", etc.



Consecuencia importante:

si X tiene cierta propiedad topológica pero Y no entonces $X \not\cong Y$.

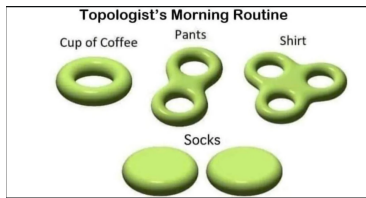
De esto se obtiene que la topología nos permite **clasificar objetos**, ¡una tarea de suma importancia dentro de las matemáticas!



Pre-requisitos para estudiar Topología



"Topology requires a twisted imagination"



Pre-requisitos

- Teoría de conjuntos (conjuntos y operaciones con ellos, colecciones de conjuntos, funciones)
- Teoría de la demostración
- Geometría de la recta real (intervalos, conjuntos acotados, propiedades de orden)
- Aritmética elemental (propiedades de números enteros, naturales, racionales)

Preferibles:

- Álgebra lineal
- Teoría de grupos



¿En dónde aprender Topología?



Divulgación:

- Petit, J.P., **El topologicón**.
- Illanes, A., **La caprichosa forma de globión**.
- Atanosov, A., **Topology and Continuity**.
- Weeks, J., **The Shape of Space**.
- En YouTube:
 - Canal **Derivando**, *Cuántos agujeros tiene un pantalón?, La conjetura de Poincaré, ...*
 - Canal **3Blue1Brown**, *A quién le importa la Topología?, ...*



Libros de texto

- Munkres, J., **Topología, un primer curso**.
Disponible en la biblioteca
- Morris, S.A., **Topología sin Dolor**.
Disponible en línea.
- Maldonado, M.A., Ponce, J.C., **Una invitación a la Topología**,
libro electrónico.

Otros:

- Maldonado, M.A., Ponce, J.C.,
bestiariotopologico.blogspot.com,
blog sobre matemáticas.
- Maldonado, M.A., matematicas.reduaz.mx/mae_mathe,
espacio personal en la página de la maestría .



Objetivos generales del curso



Reconocer que la topología proporciona un nuevo lenguaje



Reconocer que la topología proporciona un nuevo lenguaje

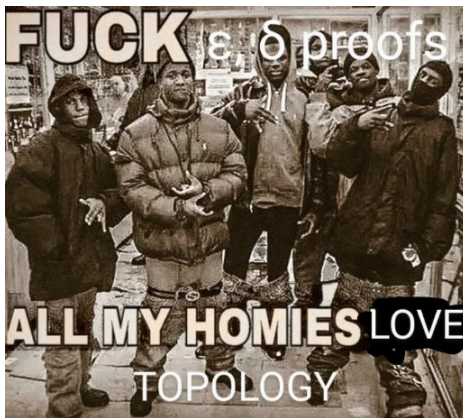
	$x \in (a, b)$
<i>Descripción gráfica de un primer curso de Topología</i>	
	$(x - \epsilon, x + \epsilon), \epsilon > 0$
	$\exists U \in \tau, x \in U$



Usar conceptos topológicos en otras áreas; en particular, para sustituir argumentos



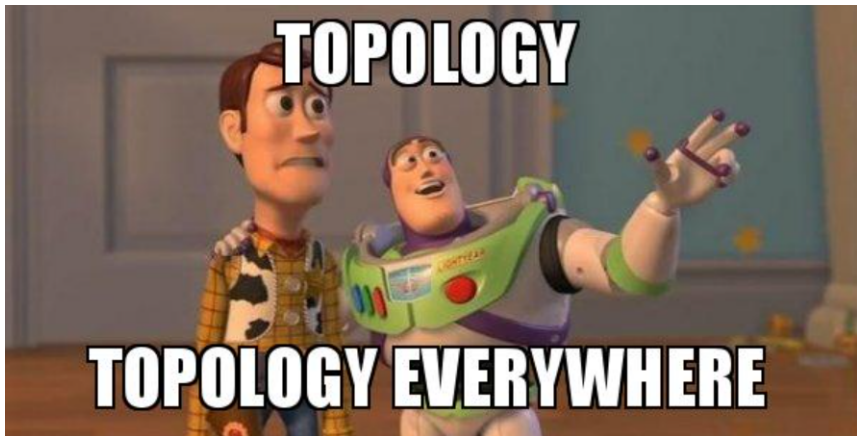
Usar conceptos topológicos en otras áreas; en particular, para sustituir argumentos



Reconocer estructuras topológicas
en distintos contextos de la matemática y fuera de ella



Reconocer estructuras topológicas
en distintos contextos de la matemática y fuera de ella



Temario (aproximado)

- Espacio topológico y ejemplos
- Cerradura, interior, frontera
- Puntos límite y conjuntos cerrados.
- Bases, sub-bases
- Espacios producto, espacios cociente
- Axiomas de separación, axiomas de numerabilidad
- Funciones continuas y homeomorfismos
- Conexidad, conexidad por trayectorias
- Compacidad

