

CÁLCULO

LISTA DE PROBLEMAS

- 1) Sea X el conjunto de todos los intervalos $(-r, r) = \{a \in \mathbb{R} : -r < a < r\}$ con r un real positivo. Para cualesquiera $A, B \in X$, escribimos que $A < B$ si $A \neq B$ y $A \subseteq B$. Prueba que $(X, <)$ es un conjunto ordenado.
- 2) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado por arriba. Prueba que $-A := \{-a : a \in A\}$ está acotado por abajo y que $\sup(A) = -\inf(-A)$.
- 3) Demuestra o da un contraejemplo a lo siguiente. Si A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente, entonces $\sup A + \sup B = \sup A + B$ donde $A + B := \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}$.
- 4) Prueba que $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.
- 5) Demuestra que $\mathbb{Z}$ es numerable.
- 6) Demuestra que si A y B son numerables, entonces $A \times B$ es numerable.
- 7) Encuentra todos los subconjuntos infinitos A de $\mathbb{R}$ tal que $\mathbb{R} \setminus A$ es finito.
- 8) Define la función

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(a, b) = |a^2 - b^2|.$$

Prueba que $(\mathbb{R}, d)$ es un espacio métrico.

- 9) Demuestra que para todo espacio métrico (X, d) , $a \in X$ y $r \geq 0$, la bola cerrada $D_r(a)$ es cerrada.
- 10) Prueba la Afirmación 2 de la Sesión 3.
- 11) Sean (X, d) un espacio métrico y A un conjunto no vacío en X . Demuestra que el conjunto de puntos límites de A y $\overline{A}$ es el mismo. Además, da un ejemplo de que no siempre es cierto que el conjunto de puntos límites de A e $\text{int}A$ es igual.
- 12) Sean (X, d) un espacio métrico y A un conjunto no vacío en X . Prueba que $X \setminus \text{int}(A) = \overline{X \setminus A}$.
- 13) Sean (X, d) un espacio métrico y $A, A_2, \dots, A_n$ conjuntos no vacíos en X . Demuestra que $\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.
- 14) Encuentra una cubierta abierta de $(0, 1)$ que no tenga subcubiertas finitas.
- 15) Sean (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de compactos en X . Prueba que si I es finita, entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ es compacto. ¿Y si I no es finita?
- 16) Sea (X, d) un espacio métrico. Asumamos que para todo subconjunto infinito B de X , B tiene un punto límite. Prueba que X es compacto.
- 17) Sea (X, d) un espacio métrico. Asumamos que para todo subconjunto infinito B de X , B tiene un punto límite. Prueba que X tiene un conjunto contable denso.
- 18) Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Demuestra que A es un subconjunto compacto conexo si y sólo si existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ tales que $A = [a, b]$.

- 19) Un conjunto A en $\mathbb{R}^d$ es convexo si para todos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ y $z \in [0, 1]$, se cumple que $z\mathbf{a} + (1-z)\mathbf{b} \in A$. Prueba que si A es convexo en $\mathbb{R}^d$, entonces es conexo.
- 20) Sean (X, d) un espacio métrico y A un conjunto conexo no vacío en X . ¿Será $\text{int}(A)$ conexo? y ¿ $\overline{A}$ es conexo?
- 21) Sea $\{\mathbf{a}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$. Prueba que si $\{\mathbf{a}_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge, entonces $\{\|\mathbf{a}_n\|\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge. ¿el inverso es cierto?
- 22) Sea a un real positivo. Definimos recursivamente la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ en $\mathbb{R}$ de la siguiente forma: $a_1 := \sqrt{a}$ y $a_{n+1} = \sqrt{a + 2a_n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. ¿Converge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$? y en caso de que converja ¿a dónde converge?
- 23) Sean $d \in \mathbb{Z}^+$ y A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^d$. Prueba que si A es compacto, existen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ tales que $\text{diam}(A) = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$.
- 24) Justifica que $(\mathbb{Q}, d)$ con $d(a, b) = |a - b|$ para todos $a, b \in \mathbb{Q}$ es un espacio métrico. Además, halla una sucesión de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que no sea convergente.
- 25) Determina para qué $a \in \mathbb{R}$ la sucesión $\{\frac{1}{1+a^n}\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ converge.
- 26) Sean (X, d) un espacio métrico y $\{K_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una familia de cerrados y acotados no vacíos en X tales que $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$. Asumamos que toda sucesión de Cauchy en X converge. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(K_n) = 0$, entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ es un único punto.
- 27) Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión de reales no negativos. Prueba que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge.
- 28) Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \geq 2$. Prueba que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{a^n}$ converge.
- 29) Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ una sucesión de reales no negativos. Prueba que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.
- 31) Sean $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ sucesiones de reales no negativos. Asumamos que $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es acotada y creciente. Prueba que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.
- 32) Sean $d \in \mathbb{Z}^+$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{b}_n$ series convergentes en $\mathbb{R}^d$. Determina si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_n \bullet \mathbf{b}_n$ converge y en caso de lo haga, determina si lo hace a $(\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \mathbf{a}_n) \bullet (\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \mathbf{b}_n)$.
- 33) Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos y $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ una función continua. Prueba que
- $$\phi(\overline{A}) \subseteq \overline{\phi(A)}.$$
- 34) Sea $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ una función continua. Prueba que existe $a \in [0, 1]$ tal que $\phi(a) = a$.
- 35) Encuentra todos los valores de $(0, 1)$ donde la función
- $$\phi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (0, 1) \setminus \mathbb{Q}; \\ \frac{1}{m} & \text{si } x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \text{ con } m, n \text{ primos relativos} \end{cases}$$
- es continua.
- 36) Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos y $\phi : X_1 \rightarrow X_2$ una función uniformemente continua. Prueba que si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X_1 , entonces $\{\phi(x_n)\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es una sucesión de Cauchy en X_2 .
- 37) Sea (X, d) un espacio métrico y $\phi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funciones uniformemente continuas. ¿Es $\phi \cdot \psi$ uniformemente continua?
- 38) Sea $r(x) \in \mathbb{R}[x]$. Prueba que la función
- $$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(z) = r(z)$$

es diferenciable.

- 39) Prueba que las funciones logaritmo natural y exponencial son derivables en su dominio.
- 40) Sean A y B abiertos de $\mathbb{R}$ con $\phi : A \rightarrow B$ y $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ funciones. ¿Será cierto que si ϕ y $\psi \circ \phi$ son derivables, entonces ψ es derivable?
- 41) Demuestra que el Teorema de Rolle implica el Teorema del valor medio.
- 42) Prueba que no necesariamente una función $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A un abierto de $\mathbb{R}$ que sea diferenciable y que satisfaga $\phi'(a) = 0$ para toda $a \in A$ es constante.
- 43) Sean A un abierto en $\mathbb{R}$ y $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Asumamos que $\phi''(a)$ existe para toda $a \in A$. Prueba que

$$\phi''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(a+h) + \phi(a-h) - 2\phi(a)}{h^2}$$

- 44) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $\phi : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ una función continua. Prueba que si $\int_a^b \phi(x) dx = 0$, entonces ϕ es la función constante 0.
- 45) Prueba que la siguiente afirmación es falsa. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $\phi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables con $\phi(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces $\frac{\psi}{\phi}$ es integrable.
- 46) Sea $\sum_{k=0}^n a_k x^k \in \mathbb{R}[x]$. Calcula

$$\int_a^b \sum_{k=0}^n a_k x^k dx$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

- 47) Calcula

$$\int_1^e x \ln(x) dx.$$

- 48) Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, calcula

$$\int_0^\pi \cos(x)^n dx.$$

- 49) Sea la curva $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ y la función

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, y) = x^2 + xy + y^2.$$

Calcula $\int_\gamma \phi$.

- 50) Sea la curva $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\gamma(t) = (t^3, t^2)$. Calcula la longitud de esta curva.
- 51) Demuestra o da un contraejemplo. Sean $d \in \mathbb{Z}^+$, $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ dos curvas tipo C^1 y $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \phi = \int_{\gamma_1} \phi + \int_{\gamma_2} \phi.$$

- 52) Sean $d, e \in \mathbb{Z}^+$, A un abierto de $\mathbb{R}^d$ y $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^e$ una transformación lineal. Prueba que ϕ es derivable y halla $D_\phi(\mathbf{a})$ para toda $\mathbf{a} \in A$.
- 52) Sean $d \in \mathbb{Z}^+$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ el producto punto usual de dos vectores en $\mathbb{R}^d$. Demuestra que la función

$$\phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Considerando $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$, prueba que ϕ es derivable y encuentra $D_\phi(\mathbf{a})$ para toda $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

- 53) Sean $d, e, f \in \mathbb{Z}^+$ con A abierto en $\mathbb{R}^d$ y B abierto en $\mathbb{R}^e$ y funciones $\phi : A \rightarrow B$ y $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}^f$. ¿Será cierto que si ψ es derivable y $\psi \circ \phi$ es derivable, entonces ϕ es derivable?
- 54) Demuestra que el producto punto euclidiano $\bullet : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable (considerando $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \simeq \mathbb{R}^{2d}$) y halla su derivada.
- 55) Sean A un abierto conexo no vacío en $\mathbb{R}^2$ y $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función y $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una transformación lineal. Supongamos que $D_\phi(\mathbf{a}) = \tau$ para todo $\mathbf{a} \in A$. ¿Qué podemos decir de ϕ ?
- 56) Encuentra las derivadas parciales de la función

$$\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, y, z) = e^{x^2 + 2 \sin(yz)} \cos(x + y + z).$$

- 57) Encuentra la derivada de

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, y) = \int_0^x \sin(t)^{t^2} dt + \int_0^{xy} y \cos(t^2) dt.$$

- 58) Demuestra que para todos $k, m \in \mathbb{Z}^+$ con m par las derivadas parciales de la siguiente función existen

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^k}{x^m + y^m} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

- 59) Con la notación del ejercicio anterior, prueba que ϕ es derivable en $(0, 0)$ si y sólo si $2k > m$.
- 60) Sean $d \in \mathbb{Z}^+$ y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ el espacio de funciones lineales de $\mathbb{R}^d$ a $\mathbb{R}^d$. Hagamos I el espacio de funciones invertibles de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. Sabemos que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \setminus I$ es cerrado. ¿Será compacto?
- 61) Sea

$$\phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Encuentra todos los puntos donde ϕ es derivable y la derivada en esos puntos.

- 62) Sean A un abierto no vacío de $\mathbb{R}^d$ y $\psi, \phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ derivables. ¿Es $\phi \cdot \psi$ derivable? ¿Cuál es su derivada en términos de ϕ y ψ ?
- 63) Sean $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_d : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables. Demuestra que $\sum_{i=1}^d \phi_i \phi_i$ es derivable y calcula su derivada.
- 64) Sean $d \in \mathbb{Z}^+$ y $c \in (0, 1)$. Prueba que una transformación lineal $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es una c -contracción si y sólo si para todo $\mathbf{a} \in S^{d-1}$, se cumple que $\|\phi(\mathbf{a})\| \leq c$.
- 65) Sean A un abierto en $\mathbb{R}$ y $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Prueba que si ϕ es una contracción, entonces $|\phi'(a)| < 1$ para toda $a \in \mathbb{R}$.
- 66) Halla un abierto A de $\mathbb{R}$ que contenga a 0 donde $\phi(x) = x^2 + x$ sea invertible y halla su inversa en ese abierto.
- 67) Prueba que no existe un abierto A de $\mathbb{R}$ que contenga a 0 donde $\phi(x) = x^2$ sea invertible.
- 68) Prueba que el Teorema del mapeo abierto no es cierto si no se pide que $D_\phi(\mathbf{a})$ sea invertible.

- 69) Demuestra o da un contraejemplo. Sea $c \in (0, 1)$ y $\psi, \phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unas c -contracciones. Entonces $\psi + \phi$ y $\psi \cdot \phi$ son c -contracciones.
- 70) Decide si la siguiente función es continuamente diferenciable.

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi(a, b) = (a^2 + b \cos(a), b^a \sin(a^2 + b^2))$$

- 71) Utiliza el Teorema de la función implícita para encontrar un $r, s > 0$ y una función $\psi : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $\psi(a) = 0$ y para todo $a \in (-s, s)$ se cumple que

$$a^2 + a\psi(a) + \psi(a)^2 = a + \psi(a)$$

- 72) Sea A un abierto de $\mathbb{R}$ que contiene al 0 y $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función doblemente diferenciable con $\phi''(0) > 0$. Prueba que existe B una vecindad de 0 en A tal que $\phi|_B$ es invertible si y sólo si $\phi'(0) \neq 0$.
- 73) Calcula el jacobiano de la función

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi(a, b) = (a^2 - b, \cos(a) - \sin(a), e^{a^2+b})$$

- 74) Encuentra todos los puntos singulares de la función del ejercicio anterior.
- 75) Sean $d \in \mathbb{Z}^+$, A un abierto no vacío de $\mathbb{R}^d$ y $\phi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$. Encuentra el jacobiano de $\phi \cdot \psi$ en términos de los jacobianos de ϕ y ψ .
- 76) Encuentra el mínimo global de la función

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(a, b) = a^2 + b^2 - 2b - 3a + 1.$$

- 77) Encuentra la terna de reales (a, b, c) tal que $a + b + c = 5$ y $a^2 + b^4 + c^6$ es mínima.
- 78) Sean $d \in \mathbb{Z}^+$ con $d \geq 2$ y $A = \{(a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_{j=1}^d a_j = 1, \sum_{j=1}^d a_j^2 = 1\}$. Encuentra el máximo de la función

$$\phi : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(a_1, a_2, \dots, a_d) = \prod_{i=1}^d a_i.$$

- 79) Denotemos por μ^* la medida exterior. Prueba que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se cumple que

$$\mu^*((a, b)) = b - a = \mu^*([a, b]).$$

- 80) Justifica que

$$\mu^* (\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{a}\| \leq 1\}) = \pi.$$

- 81) Da un ejemplo abierto y no acotado A en $\mathbb{R}^d$ tal que $\mu^*(A)$ existe.
- 82) Prueba que $\mathbb{Q}$ es Lebesgue medible. ¿Cuál es su medida de Lebesgue?
- 83) Denotaremos por $\mu(X)$ la medida de Lebesgue de X , si existe. Sean $d \in \mathbb{Z}^+$, $r > 0$ y A un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ con $\mu(A) > 0$. Prueba que $rA = \{r\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\}$ es medible y que

$$\mu(rA) = r^d \mu(A).$$

- 84) ¿Es el conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{2k+1}}, \frac{1}{2^{2k}} \right]$ Lebesgue medible? ¿Cuál es su medida?
- 85) Prueba que todo abierto en $\mathbb{R}$ es la unión contable de intervalos abiertos.
- 86) Demuestra que si ϕ es una función Lebesgue medible, entonces $|\phi|$ es Lebesgue medible.
- 87) Da un ejemplo de una función $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que sea Lebesgue medible pero que no sea continua.

- 88) Halla una sucesión de funciones simples $\phi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que su límite puntual restringido a $[0, 1]$ sea

$$\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(z) = z^2.$$

- 89) Para cada $n, k \in \mathbb{Z}^+$ con $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, sea $A_{k,n} := \left[\frac{(k-1)^2}{n^2}, \frac{k^2}{n^2} \right)$. Para $n \in \mathbb{Z}^+$, sea

$$\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_n(a) = \sum_{k=1}^n k \mathbf{1}_{A_k}$$

- . Calcula $\int_{\mathbb{R}} \phi_n$.