



**Examen de Admisión
Maestría en Matemáticas**

Diciembre 3-4, 2024

Nombre:

Resuelva los siguientes ejercicios, detallando sus argumentos.

1 Álgebra Lineal

1. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, y sea $S(X) := \{f : X \rightarrow X \mid f \text{ es una función biyectiva}\}$. Demuestre que $(S(X), \circ)$ es un grupo.
2. Sea A una matriz cuadrada, de dimensión $n \times n$, con entradas en el campo K tal que $A^m = 0$ para algún entero $m \geq 1$.
 - (a) Demuestre que $\lambda = 0$ es el único valor propio de A .
 - (b) Determine el polinomio característico P_A de A y muestre que $A^n = 0$. (Sugerencia: Asuma que P_A tiene la forma $\prod_{i=1}^n (t - \lambda_i)$ para algunos escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.)
 - (c) Demuestre que $\mu I_n - A$ es invertible si, y solo si, $\mu \in K \setminus \{0\}$.
 - (d) Demuestre que $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{n-1}$.

2 Cálculo Avanzado

1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$, con A cerrado y B compacto, tales que $A \cap B = \emptyset$. Demuestre que existe $\epsilon > 0$ tal que $\|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \epsilon$, para toda $\bar{x} \in A$, y toda $\bar{y} \in B$.
2. Demostrar que la función $z = xy + xe^{y/x}$ satisface

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

RESPONSABLES: Dr. Miguel Angel Maldonado Aguilar, Dr. Jesús Leños Macías, Dr. Juan Antonio Pérez

3 Lógica y Conjuntos

1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, y suponga que $a \sim b$ si, y solo si, $f(a) = f(b)$. Demuestre que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre X , caracterice las clases de equivalencia y demuestre que, si denotamos $X / \sim = \tilde{X}$, entonces $F : \tilde{X} \rightarrow Y$ definida mediante $F([x]) := f(x)$ es una función inyectiva.
2. Sea $n > 3$ entero, y suponga que n puntos distintos sobre un círculo se unen en orden consecutivo por segmentos de recta formando un polígono convexo P . Demuestre que la suma de los ángulos interiores de P es $180(n - 2)$.

