

Topología de Conjuntos

presentación de curso

Miguel A. Maldonado
Unidad Académica de Matemáticas, UAZ
`mmaldonado@uaz.edu.mx`

Semestre agosto-diciembre 2025

Contenido

- 1 ¿Qué es Topología?
- 2 ¿Qué se estudia en Topología?
- 3 ¿Qué propiedades se estudian en Topología?
- 4 Referencias generales
- 5 Acerca del curso



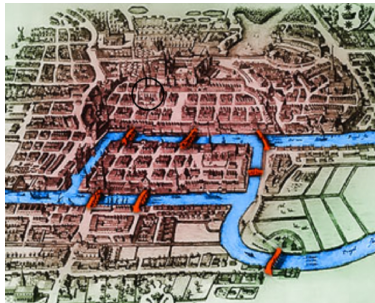
Lo que **no** es Topología



Una pequeña historia para entender qué es la Topología



Konigsberg fue la antigua capital de Prusia del Este hasta 1945 cuando cambió su nombre a Kaliningrado.

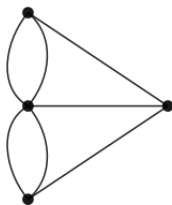


La ciudad es famosa porque cuenta con siete puentes que cruzan el río Pregel. Los ciudadanos tenían un interés en realizar una caminata a lo largo del pueblo, cruzando los siete puentes una sola vez, partiendo y regresando a la iglesia que se encuentra al norte.

Pregunta: ¿es posible hacer un tal recorrido?



En 1736 L. Euler escribió sobre este problema: el primer acierto fue representar cada porción de la ciudad con un vértice y cada puente por una arista (que une a los correspondientes vértices).



Este modelo enfatiza que la disposición de las regiones o la posición entre ellas, así como la posición y longitud de los puentes, son totalmente irrelevantes...

Lo que es importante es la manera en que los vértices (regiones) se **conectan** entre sí a través de las aristas (puentes).



Con la gráfica anterior el problema original se traduce en poder recorrer todas aristas de la gráfica, iniciando y terminando en un mismo vértice (cualquiera); a esto se le llama un **circuito euleriano**.

L. Euler dió la solución al problema en 1736: *es imposible recorrer cada una de las aristas de la gráfica una sola vez y regresar al mismo vértice donde se inició.*

¿La razón de esto? Para que exista un circuito euleriano en una gráfica cada vértice debe tener un numero par de aristas que incidan en él. En este caso no se cumple esta condición. ■

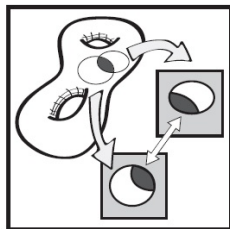
Al fijarse en la manera en que se relacionan los objetos, sin importar longitudes o áreas, la solución de L. Euler puede considerarse como el nacimiento de la Topología.



Lo que **sí** es Topología

Es un tipo de Geometría que estudia la *forma* de los objetos permitiendo que sean estirados y contraídos pero no rotos.

- Área **joven** de las matemáticas: el concepto de espacio topológico se debe a J.B. Listing (1847).
- Junto con **Álgebra** y **Análisis** forman las tres áreas principales de las matemáticas puras.
- Ofrece estudio **cualitativo** de los objetos; p.e. ángulos y distancias son irrelevantes.
- Estudia propiedades **robustas** (= no cambian con pequeñas variaciones continuas), esto hace que tengas diversas aplicaciones.





Por ejemplo, en Geometría Analítica los objetos geométricos con distintas **ecuaciones** son objetos no equivalentes:

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \neq \{(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 1\}$$

En Topología, por otro lado, dos objetos son **equivalentes** si pueden deformarse uno en el otro de manera **continua**; es decir, sin cortar, ni razgar.

Formalmente, $X \cong Y \iff$ existen funciones continuas

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

tales que $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$.

¿y cómo se estudian los objetos dentro de la Topología?

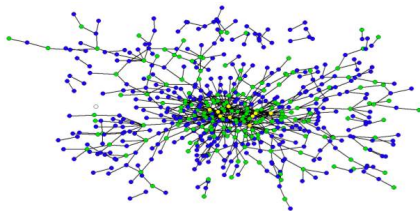
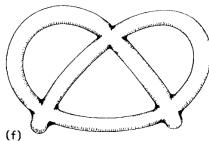
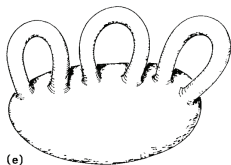




Los objetos de estudio son **espacios topológicos** y son conjuntos con cierta noción de "cercanía" entre sus elementos, a través de ciertos subconjuntos llamados **abiertos**.

Ejemplos:

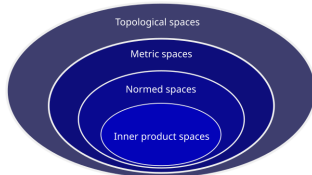
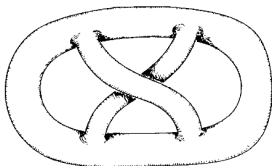
- Objetos de la Geometría: curvas, planos, superficies, etc.
- Espacios euclidianos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc.
- Ciertos objetos algebraicos
- Conjuntos que surgen de aplicaciones o de otras áreas.



Recordemos que los intervalos abiertos tienen cierta "aritmética":

- La unión de intervalos abiertos es un intervalo abierto.
- La intersección de dos intervalos abiertos es un intervalo abierto.

Los abiertos de un espacio topológico también satisfacen esta aritmética pero sin la presencia de ninguna métrica; es decir, sólo importa su estructura como conjunto.

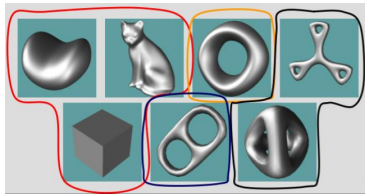
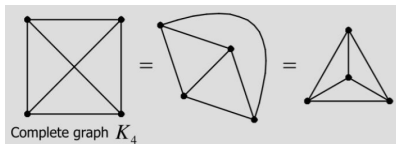


¿Qué propiedades se estudian en Topología?



Las **propiedades topológicas** son aquellas que no cambian bajo deformaciones continuas; en particular, si $X \cong Y$ entonces tienen las mismas propiedades.

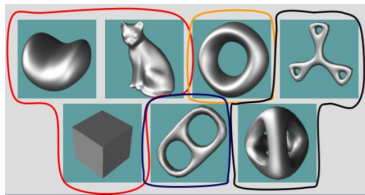
Ejemplos: el número de partes (**conexidad/conectividad**), tener orillas, ser *abierto*, ser cerrado y acotado (**compacto**), número de "hoyos", cardinalidad, etc.



Consecuencia importante:

si X tiene cierta propiedad topológica pero Y no entonces $X \not\cong Y$.

De esto se obtiene que la topología nos permite **clasificar objetos**, una tarea de suma importancia dentro de las matemáticas!



(Algunas) referencias



- **Petit, J.P., El topologicon.** Cómic (con muchos dibujos) de divulgación.
- **Illanes, A., La caprichosa forma de globión.**
Libro de divulgación.
- **Atanosov, A., Topology and Continuity.**
Pequeño texto introductorio al área.
- **Weeks, J., The Shape of Space.**
Libro sobre Topología y Geometría.
- En línea:
 - Canal **Derivando**, *Cuántos agujeros tiene un pantalón?, La conjetura de Poincaré, ...*
 - Canal **3Blue1Brown**, *¿A quién le importa la Topología?, ...*
 - @Eze.martinez: *Mobius y botella de Klein*
 - @teolopezpuccio, @conejodelasgeometrias



Acerca del curso

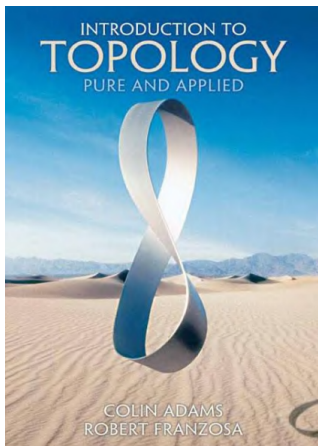


Objetivo general del curso

	$x \in (a, b)$
	$(x - \epsilon, x + \epsilon), \epsilon > 0$
	$\exists U \in \tau, x \in U$



Referencia principal



Intro to Topology Pure and Applied,
C. Adams y R. Franzosa.

Al final de cada capítulo se incluyen aplicaciones a temas como **sistemas de información geográfica, sistemas dinámicos, topología robótica, bioquímica y cosmología.**



Temas que comprende el curso:

- **Capítulo 0:** repaso sobre conjuntos, funciones, espacios euclidianos.
- **Capítulo 1:** espacios topológicos, bases, conjuntos cerrados, espacios T_2 .
- **Capítulo 2:** interior, cerradura, puntos límite, frontera.
- **Capítulo 3:** subespacios, espacios producto, espacios producto.
- **Capítulo 4:** continuidad, homeomorfismos, propiedades topológicas.
- **Capítulo 6:** separaciones, conexidad, Teo de Valor Intermedio, arco-conexidad
- **Capítulo 7:** cubiertas, compacidad, Teo. Valor Extremo, compactificación.

