Algunos espacios

Miguel A. Maldonado

mmaldonado@uaz.edu.mx

En esta notas damos cuenta de algunos espacios topológicos que resultan de interés dentro de la topología (algebraica).

marzo 2025

Números reales, complejos y cuaternios.

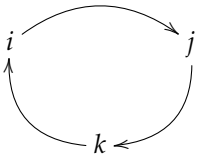
Tomado de *Topology of Lie Groups*, de M. Mimura, H. Toda, AMS, 1991.

$\mathbb{R}$ denota el conjunto de **números reales**; el conjunto de **números complejos** está dado por $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Los **cuaternios (de Hamilton)** se construyen considerado el conjunto

$$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\},$$

donde la suma se realiza componente a componente y la multiplicación se determina por la ley distributiva y las relaciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$



Si $\mathbb{F}$ denota a alguno de los conjuntos $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, entonces $\mathbb{F}$ es grupo abeliano con la suma como operación. Por otro lado, $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$ es un grupo respecto a la multiplicación; abeliano en el caso $\mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Resulta de gran importancia considerar la sucesión de inclusiones

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$$

que puede *extenderse* a la derecha al definir los **octonios de Hamilton**. Es de notar que al moverse a la derecha se pierden propiedades algebraicas.

El conjunto de n-tuplas

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{F}\}, \qquad \mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$, y como tal, es un grupo topológico abeliano respecto a la suma entrada a entrada.

Observemos que, directo de la definición, se tienen las siguientes identificaciones:

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \quad \mathbb{H}^n \cong \mathbb{C}^{2n}$$

En particular, $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{4n}$, con lo que es posible definir el concepto de **norma** en $\mathbb{C}, \mathbb{H}$ haciendo uso del correspondiente en los espacios euclidianos: para $\overline{x} \in \mathbb{F}^n$

$$||\overline{x}|| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots |x_n|^2}$$

De hecho, $\mathbb{F}^n$ es espacio métrico con distancia $d(\overline{x}, \overline{y}) = ||\overline{x} - \overline{y}||$.

El conjunto

$$S(\mathbb{F}^{n+1}) = \{\overline{x} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid ||\overline{x}|| = 1\},$$

llamado la **esfera unitaria** de $\mathbb{F}^{n+1}$, es un conjunto compacto, Hausdorff, homeomorfo a la esfera $S^{d(n+1)-1}$ del espacio euclidiano $\mathbb{R}^{d(n+1)}$, donde $d = 1$ si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, $d = 2$ si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y $d = 4$ si $\mathbb{F} = \mathbb{H}$. De igual forma, el conjunto

$$D(\mathbb{F}^{n+1}) = \{\overline{x} \in \mathbb{F}^{n+1} \mid ||\overline{x}|| \leq 1\},$$

es llamada la **bola cerrada unitaria** de dimensión $n+1$.

Grupos topológicos

Objetos interesantes surgen al combinar dos (o más) estructuras matemáticas que *convivan* entre sí. El ejemplo más inmediato es el caso de la recta real $\mathbb{R}$ pues tiene una estructura algebraica (conocida desde los primeros años de la escuela), así como una más geométrica relacionada con intervalos abiertos.

Decimos que un grupo G es un **grupo topológico** si está equipado con una estructura de espacio topológico tal que las operaciones *mutiplicación* y *tomar inversos*

$$\begin{cases} m : G \times G \to G, \;\; (g,h) \mapsto m(g,h) := gh \\ inv : G \to G, \;\; g \mapsto inv(g) := g^{-1} \end{cases}$$

son funciones continuas. Equivalentemente, G es grupo topológico si y sólo si $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ es función continua.

• Cualquier grupo (algebraico) tiene estructura de grupo topológico al dotarlo de la topología discreta; el resultado es llamado **grupo topológico discreto**.

• Como dijimos antes, los conjuntos $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$ son grupos aditivos con las operaciones usuales de suma y de tomar inverso:

La topología euclidiana tiene por base la colección $\{B_r(\overline{x}) \mid r > 0, \overline{x} \in \mathbb{R}^n\}$ de bolas abiertas.

$$m(\overline{x},\overline{y}) := \overline{x} + \overline{y}, \qquad inv(\overline{x}) := -\overline{x}$$

Estas operaciones son funciones continuas con la topología euclidiana, por lo que $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ son grupos topológicos.

• Recordemos que la circunferencia unitaria S^1 es subespacio de $\mathbb{C}$ dado por los complejos unitarios; es además un grupo topológico bajo la multiplicación de números complejos, debido a la propiedad $||z_1 z_2|| = ||z_1||\,||z_2||, \forall z_1, z_2 \in S^1$.◀

La 0-esfera $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ también tiene estructura de grupo al hacer la identificación $S^0 \cong \mathbb{Z}_2$, el grupo multiplicativo de dos elementos.

Acciones de grupo

"Los grupos, como los hombres, se conocen a través de sus acciones".
Guillermo Moreno

Una **acción (por la izquierda)** de un grupo topológico G en un espacio topológico X es una función continua

$$G \times X \to X, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x$$

que satisface:

- $e \cdot x = x$, donde $e \in G$ es el elemento identidad.
- $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Bajo estas circunstancias usaremos la notación $G \curvearrowright X$ para referirnos a que G actúa sobre el espacio X.

Algunos ejemplos de interés:

• Consideremos $S^1 \subset \mathbb{C}$ y notemos que tenemos una acción diagonal $S^1 \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dada por $z \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (zz_1, \ldots, zz_n)$.

• La **función antipodal** está dada por

$$a : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}, a(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, \ldots, -x_{n+1})$$

La función antipodal restringida a la n-esfera S^n define una acción de $\mathbb{Z}_2 \cong \{1, a\}$ en S^n llamada **acción antipodal**.

• Hagamos $X = \mathbb{R} \times [-1, 1]$ y definamos una acción de $\mathbb{Z}$ en X mediante

$$n \cdot (x, t) = (n + x, (-1)^n t)$$

Las clases del cociente tiene al menos un representante en el cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$, con los lados derecho e izquierdo identificados, esto es una banda de Möbius.

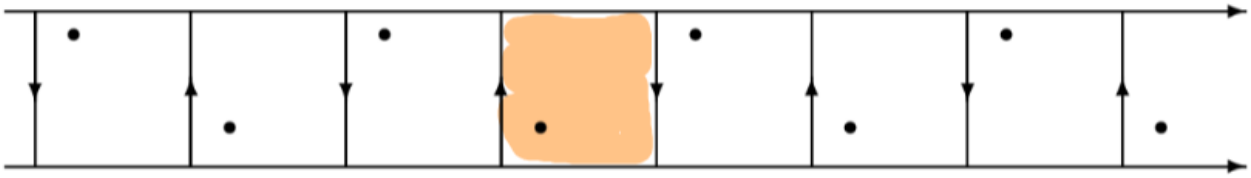


Figure 1: Los enteros $\mathbb{Z}$ actúan en el espacio $\mathbb{R} \times [-1, 1]$ mediante una translación, alternando un signo -1; la región en naranja representa una clase lateral dada por una banda de Mobius

• Para cada $m \in \mathbb{Z}$ consideramos la traslación $T_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T_m(x) = x + m$. El conjunto $G = \{T_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ es un grupo:

$$T_{m+n} = T_m \circ T_n, \qquad T_0 = id, \qquad (T_n)^{-1} = T_{-n}$$

Observemos que $G \cong \mathbb{Z}$ bajo la identificación $n \mapsto T_n$.◀

Dada una acción de G en X definimos una relación de equivalencia mediante $x \sim g \cdot x$, para algún $g \in G$. Denotamos por Gx a la clase de equivalencia de $x \in X$ y la llamamos su G-**órbita**; es decir,

$$Gx = \{g \cdot x \mid g \in G\}$$

La G-órbita para $A \subseteq X$ es la unión de las órbitas de sus elementos

$$GA = \bigcup_{x \in A} Gx$$

El conjunto de órbitas forma una partición de X, denotada por X/G y llamado el **espacio de órbitas** de la acción de G. Tenemos entonces una función cociente canónica

Espacio cociente asociado a una acción de G

$$\pi : X \longrightarrow X/G, \quad x \longmapsto Gx,$$

con $\pi^{-1}(\pi(x)) = G_x$, como subconjunto de X. Con la topología cociente los abiertos en X/G son órbitas de abiertos en X:

$$U \subseteq X \longmapsto G_U = \bigcup_{x \in U} G_x$$

El grupo **estabilizador** o **subgrupo de isotropía** de X es el subgrupo

$$stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

Decimos que una acción de G en X es **transitiva** si para $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $g \cdot x = y$. Notemos que si la acción es transitiva, entonces X/G consiste de una única órbita. Además, si tomamos $x, y \in X, h \in G$ con $hx = y$, se obtiene

$$stab(y) = stab(h \cdot x) = h\, stab(x)\, h^{-1}$$

Así, los subgrupos estabilizadores son subgrupos conjugados.

Una acción de G en X es llamada **libre** si $stab(x) = \{e\}$, $\forall x \in X$; es decir, el único elemento de G que deja fijos elementos de X es el elemento identidad e. Equivalentemente, las imágenes $\{g \cdot x\}_{g \in G}$ son todas distintas para $x \in X$ fijo.

Una acción libre de G en X junto con algunas condiciones técnicas dan lugar a una **proyección cubriente** de la forma $X \to X/G$; véase Ejercicio 23 al final de la Sec. 1.3 del libro *Algebraic Topology*, de A. Hatcher.

Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ el grupo topológico $\mathbb{F}^* = \mathbb{F}\backslash\{0\}$ actúa en $\mathbb{F}^{n+1}\backslash\{0\}$ mediante multiplicación escalar (por la izquierda)

$$\mathbb{F}^* \times (\mathbb{F}^{n+1}\backslash\{0\}) \to \mathbb{F}^{n+1}\backslash\{0\}, \quad x(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (xx_0, xx_1, \ldots, xx_n)$$

El cociente $P^n(\mathbb{F}) := (\mathbb{F}^{n+1}\backslash\{0\})/\mathbb{F}^*$ es llamado el **espacio proyectivo** de dimensión n sobre $\mathbb{F}$. Es común usar las notaciones

Espacios proyectivos

$$\mathbb{RP}^n,\ \mathbb{CP}^n,\ \mathbb{HP}^n$$

$$\mathbb{RP}^n,\ \mathbb{CP}^n,\ \mathbb{HP}^n$$

para los distintos casos de $\mathbb{F}$. Un punto en $P^n(\mathbb{F})$ puede pensarse como un subespacio de dim. 1 determinado por $\overline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ y se denota por

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in P^n(\mathbb{F})$$

Grupos de matrices

Tal vez uno de los ejemplos más importantes de grupos topológicos es el de matrices pues permite que distintas partes de las matemáticas interactúen entre sí.

El conjunto de matrices cuadradas $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ se identifica con el espacio euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$ al considerar las columnas de una matrices en un vector de tamaño $n \cdot n$.

La función determinante $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es una función polinomial en las entradas de A, por lo tanto es una función continua. Con esto, el subespacio $\det^{-1}(0)$ es cerrado y su complemento

$$GL_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2} \backslash det^{-1}(0)$$

consiste de las matrices cuadradas invertibles. Por lo mencionado antes hereda la estructura topológica de $\mathbb{R}^{n^2}$ y además forma un grupo bajo la multiplicación matricial, el cual esta dado por polinomios en las entradas de las matrices por lo que es una operación continua. La función de inversión $A \mapsto A^{-1}$ es una función racional en los coeficientes de A (por la regla de Cramer) por lo que es continua; es decir, $GL_n(\mathbb{R})$ es un grupo topológico llamado el **grupo general lineal real**.

Equivalentemente, el grupo general lineal $GL_n(\mathbb{R})$ consiste de las transformaciones lineales invertibles (isomorfismos).

Observemos que $GL_n(\mathbb{R})$ es Hausdorff y tiene dos componentes conexas: $GL_n^+(\mathbb{R}), GL_n^-(\mathbb{R})$, dadas por las matrices de determinante positivo y aquellas de determinante negativo, respectivamente.

Debido a la inclusión de los números reales en el conjunto $\mathbb{C}$ se tiene una función inyectiva

$$M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{C})$$

que puede entenderse como una ”extensión de coeficientes". La construcción del grupo general lineal puede llevarse a cabo en el terreno complejo dando lugar al **grupo general lineal complejo** $GL_n(\mathbb{C})$.

Subgrupos de importancia

El **grupo especial lineal**, dado por

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\},$$

es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$ al observar que está dado por la pre-imagen $\det^{-1}(1)$. El **grupo especial lineal** complejo

$$SL_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}$$

Al igual que antes $SL_n(\mathbb{C})$ es subespacio cerrado de $GL_n(\mathbb{C})$.

Una matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $A^T A = I_n$ es llamada **matriz ortogonal**. Dado que la matriz inversa de una matriz ortogonal A es A^T y además

$$(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = BI_n B^T = BB^T = I_n,$$

se sigue el conjunto de matrices orgonales $O_n(\mathbb{R})$ es un grupo llamado el **grupo ortogonal real** de $GL_n(\mathbb{R})$.

$O_n(\mathbb{R})$ es un subgrupo cerrado de $GL_n(\mathbb{R})$ debido a que la relación $A^T A = I_n$ se traduce en n^2 ecuaciones:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij},$$

donde $A = [a_{ij}]$.

Notemos que para $A \in O_n(\mathbb{R})$

$$(\det A)^2 = \det A^T \det A = \det(A^T A) = \det I_n = 1$$

por lo que $O_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R}) \cup O_n^-(\mathbb{R})$, donde

$$SO_n(\mathbb{R}) = O_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

es llamado el **grupo ortogonal especial**.

Para $A \in GL_n(\mathbb{R})$ las siguientes condiciones son equivalentes:

- A es isometría lineal
- $Ax \cdot Ay = x \cdot y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- A es ortogonal

donde una **isometría lineal** es una función biyectiva $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que preservan distancia; es decir, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ y además $f(0) = 0$.

Notemos que $SO_1(\mathbb{R}) = \{1\}$, el grupo trivial. Otros grupos ortogonales pueden describirse fácilmente:

- Tomemos $A \in SO_2(\mathbb{R})$ y tomemos su primer vector columna, digamos $z \in S^1$. Notemos que el segundo vector columna queda determinado automaticamente: es iz, con $i^2 = -1$. Más aún, se tiene una biyección $S^1 \leftrightarrow SO_2(\mathbb{R})$ que, de hecho, es un isomorfismo de grupos (multiplicativos).

- Otra forma de ver el isomorfismo anterior es como sigue: consideremos $\mathcal{C} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$\mathcal{C} = \{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

La función $F : \mathbb{C} \to \mathcal{C}$ dada por $F(a+ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ define un isomorfismo de grupos aditivos. Por restricción a los complejos unitarios F induce un isomorfismo entre $SO_2(\mathbb{R})$ y S^1.

- De las descripciones anteriores podemos describir a $A \in SO_2(\mathbb{R})$ como sigue: tomemos $z \in S^1$ y lo escribimos $z = \cos(2\pi\alpha) + i\,\sin(2\pi\alpha)$, para algún $\alpha \in [0,1)$. La matriz de rotación tiene la forma
$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi\alpha) & -\sin(2\pi\alpha) \\ \sin(2\pi\alpha) & \cos(2\pi\alpha) \end{pmatrix}$$
y su efecto en un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ está dado por la multiplicación $A \cdot \overline{x}$.

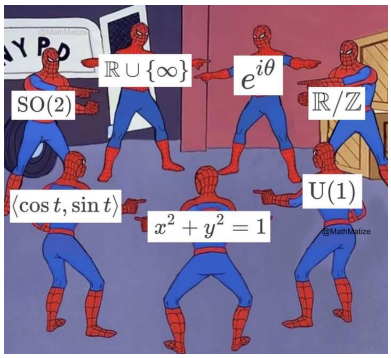


Figure 2: El grupo $SO_2(\mathbb{R})$

El **grupo unitario** de $GL_n(\mathbb{C})$ está dado por

$$U_n(\mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^T \cdot A = I_n\}$$

donde A^T es la matriz traspuesta de $A = [a_{ij}]$ dada por $A^T = [a_{ji}]$ y $\overline{A}^T$ es matriz conjugada hermitiana dada por $\overline{A}^T = [\overline{a_{ij}}]^T = [\overline{a_{ji}}]$. El **grupo especial unitario** se define como

$$SU_n(\mathbb{C}) = U_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$$

Consideremos el grupo de matrices triangulares superiores unipotentes

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Claramente tienen $\det = 1$ por lo que H es un subgrupo de $SL_3(\mathbb{R})$ y es llamado el **grupo de Heisenberg**. Notemos que, como x, y, z pueden ser arbitrariamente grandes, H no está acotado por lo que no puede ser compacto. En general, los grupos $SL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{C})$ no son compactos para $n > 1$.

Grupos de matrices como esferas

Recordemos que $O_n(\mathbb{R}) \curvearrowright S^{n-1}$ mediante multiplicación matricial, y lo hace, además, de manera transitiva pues para $\overline{u} \in S^{n-1}$ cualquiera podemos hallar una base ortonormal $\{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n = \overline{u}\}$ cuyos vectores forman las columnas de una matriz ortogonal $A \in O_n(\mathbb{R})$ tal que $Ae_n = \overline{u}$.

Por otro lado, notemos que si $\overline{v} = e_n \in S^{n-1}$ es un vector de la base canónica, entonces $Ae_n = e_n \iff$ la última columna de A es precisamente e_n y el resto de las columnas de A son ortogonales a e_n. Dado que las columnas de A forman un conjunto ortonormal de vectores, cada una de las primeras $(n-1)$ columnas de A tienen la forma

$$\begin{bmatrix} a_{1_k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{n-1k} \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde la matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{bmatrix}$$

es ortogonal y por lo tanto pertenece a $O_{n-1}(\mathbb{R})$; de aqui se tiene que $Stab(e_n) = O_{n-1}(\mathbb{R})$. Haciendo la identificación

$$O(n-1) \ni A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(n)$$

se tiene que $Stab(e_n) = O_{n-1}(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$. Por la proposición anterior se tiene

$$O_n(\mathbb{R})/Stab(e_n) = O_n(\mathbb{R})/O_{n-1}(\mathbb{R}) \cong S^{n-1}$$

y la función cociente se identifica con $O(n) \to S^{n-1}$ que envia a cada matriz A a su primer columna.

En el ejemplo anterior pudimos haber considerado $SO_{n-1}(\mathbb{R}) \curvearrowright S^{n-1}$ para obtener

$$SO_n(\mathbb{R})/SO_{n-1}(\mathbb{R}) \cong S^{n-1},$$

también sus análogos complejos:

$$O_n(\mathbb{C})/O_{n-1}(\mathbb{C}) \cong S^{n-1},$$

y cuaterniónicos

$$O_n(\mathrm{H})/O_{n-1}(\mathrm{H}) \cong S^{4n-1}.$$

Consideremos $A \in O_k(\mathbb{R})$, $B \in O_{n-k}(\mathbb{R})$ y el subgrupo de $O_n(\mathbb{R})$ dado por

$$\begin{pmatrix} A & 0_{k,n-k} \\ 0_{n-k,k} & B \end{pmatrix}$$

Con esto se identifica la inclusión $O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R}) \subset O_n(\mathbb{R})$.

Similarmente a lo que se hizo antes, $SO_n(\mathbb{R})$ se puede expresar como subgrupo de $SO_{n+1}(\mathbb{R})$ mediante la identificación:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para $A = [a_{ij}] \in SO_n(\mathbb{R})$.

Más sobre espacios proyectivos

Notemos que, por definición, el espacio $\mathbb{RP}^n$ es conexo, compacto y Hausdorff. Además, tiene otras descripciones equivalentes:

- El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ está dado por el cociente $S^n/\mathbb{Z}_2$, donde $\mathbb{Z}_2$ actúa de manera antipodal en S^n:

$$(1) \cdot x = x, \ (-1) \cdot x = -x \qquad \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$$

- Para el disco unitario $D^n := D(\mathbb{R}^n)$ consideramos la relación de equivalencia

$$\begin{cases} x \sim y, & x, y \in int(D^n) \\ x = -y, & x, y \in \partial D^n \cong S^{n-1} \end{cases}$$

  El espacio proyectivo $\mathbb{RP}^n$ es homeomorfo al espacio cociente $D^n/\sim$.

Otras descripciones de $\mathbb{RP}^n$ se darán más adelante . Para ciertas dimensiones, el espacio proyectivo real puede ser descritos de manera directa:

$\mathbb{RP}^n$ también puede describirse como un espacio de adjunción (o de pegado), un espacio lente o como una variedad de Grassman

• Tomemos $f : S^1 \to S^1, z \mapsto z^2$ y notemos que $f(z) = f(-z)$. Asi, tenemos una función continua $\tilde{f}$ que hace al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & \nearrow_{\tilde{f}} & \\ \mathbb{RP}^1 & & \end{array}$$

Puesto que $\mathbb{RP}^1$ es compacto y S^1 es Hausdorff, $\tilde{f}$ es homeomorfismo; así que $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$.

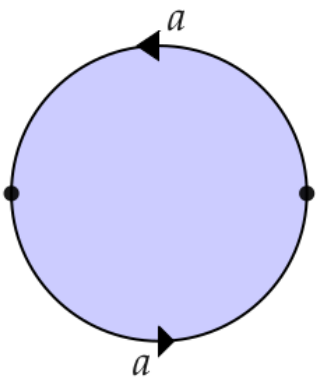


Figure 3: Representación plana del espacio proyectivo $\mathbb{RP}^2$.

• De la definición del espacio proyectivo como cociente del disco unitario tenemos que $\mathbb{RP}^2$ se puede representar como el disco D^2 en el que se hacen identificaciones antipodales; es decir, indentificamos puntos de su frontera diametralmente opuestos.

• Para el grupo de rotaciones $SO_3(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^3$ se tiene que $\mathbb{RP}^3 \cong SO_3(\mathbb{R})$. Tomemos $\mathbb{RP}^3 \cong D^3/R$ y definamos $h : D^3 \to SO_3(\mathbb{R})$ como sigue: sea A_x la rotación con eje la linea l_x del origen a x en el ángulo $|x|\pi$ y definamos

$$h(x) = \begin{cases} I, & x = 0 \\ A_x, & x \neq 0 \end{cases}$$

Observemos que la función es continua; probaremos que es sobreyectiva: dada A rotación a lo largo de una linea l_x (del origen a x) y de ángulo α definimos

$$\begin{cases} h(\frac{\alpha}{|x|\pi}x), & \alpha \leq \pi \\ \\ h(\frac{2\pi-\alpha}{|x|\pi}x), & \alpha \geq \pi \end{cases}$$

Notemos que en ambos casos la imagen es A. Además notemos que las rotaciones por un ángulo $\alpha = \pi$ son imagen de dos puntos antipodales mientras que las otras rotaciones son imagen de un solo punto. La función entonces pasa al cociente $D^3/R \to SO_3(\mathbb{R})$, que es un homeomorfismo pues $SO_3(\mathbb{R})$ es compacto. Para dimensiones mayores no se tiene ninguna relación entre $\mathbb{RP}^n$ y $SO_n(\mathbb{R})$.

• Para dimensiones mayores $\mathbb{RP}^n$ no tiene una descricpion tan directa como las dadas arriba.◀

Al igual que en el caso real, el espacio proyectivo complejo $\mathbb{CP}^n$ es un espacio conexo, compacto y Hausdorff, y puede ser descrito de distintas maneras:

- Consideremos la esfera $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, donde

$$S^{2n+1} = \{(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} ||z_i||^2 = 1\}$$

  El cociente S^{2n+1}/S^1, donde la acción está dada por multiplicación compleja

$$z(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (zz_1, \ldots, zz_{n+1}),$$

  es homeomorfo a $\mathbb{CP}^n$.

- El espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$ es homeomorfo al cociente D^{2n}/R, donde R es la relación de equivalencia dada por $x = y$ ó $x \in S^{2n-1}, \exists \lambda \in S^1, xR\lambda y$.

Existe un homeomorfismo $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ puede ser escrito de manera explícita:

$$[z_0, z_1] \longmapsto \left(\frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z}_0 z_1 - \overline{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\overline{z}_0 z_1 + \overline{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \right)$$

De esto se obtiene una función

$$f : S^3 \longrightarrow S^2$$

conocida el **mapeo de Hopf**. En teoría de homotopía esta función es importante pues al ser homotopicamente no trivial, define una manera de mapear una esfera en otra de dimensión menor, algo que en primera instancia no parece ser posible. Finalmente, al ser f no trivial, determina un elemento (no trivial) en el grupo de homotopía $\pi_3(S^2)$.

El espacio proyectivo cuaterniónico $\mathbb{HP}^n$ se describe como el cociente D^{4n}/R, donde R es la relación de equivalencia está dada por

$$xR\lambda y,\ x \in \partial D^{4n} \cong S^{4n-1}, \lambda \in S^3 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| = 1\}$$

Espacios lente

Primer encuentro. Dados dos toros sólidos $T_1 = D^2 \times S^1, T_2 = S^1 \times D^2$ consideramos el homeomorfismo

$$f : \partial T_1 \to \partial T_2,\ \ (x, y) \mapsto (x^a y^c, x^b y^d),\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

El espacio $M(a, b)$ que resulta de pegar los toros a lo largo de sus fronteras, vía f, es llamado **espacio lente**.

La naturaleza *topológica* del espacio lente únicamente depende de a, b; véase *Lens Spaces*, de J. Grüning.

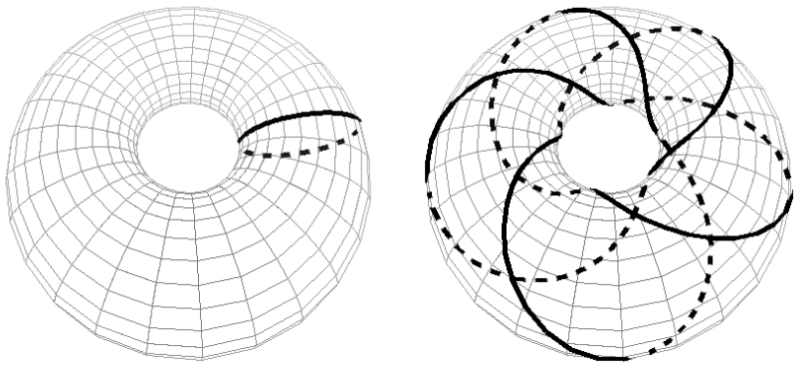


Figure 4: El lado derecho de la figura muestra la imagen de la curva a la izquierda, para el homeomorfismo f con $|a| = 2, |b| = 3$.

La construcción anterior generaliza algunos espacios: $M(0, b) \cong S^2 \times S^1, M(1, b) \cong S^3$.

SEGUNDO ENCUENTRO. Sean $p > 1, q$ primos relativos y denotemos por r a la rotación en $\mathbb{R}^3$ por $2\pi/p$ radianes en el sentido de las manecillas del reloj, esto a lo largo de una linea orientada de acuerdo a los ejes coordenados; de igual forma, denotamos por σ a la simetría (ortogonal) respecto al ecuador (plano $z = 0$). Con esto definimos el **espacio lente** $L(p,q) = D^3/\sim$, donde $\sim$ es la relación de equivalencia dada por

$$\begin{cases} x \sim x, & x \in int(D^3) \\ x \sim \sigma(r^q(x)), & x \in \partial D^3 = S^2 \end{cases}$$

La condición de p, q primos relativos se usa aquí para garantizar que la acción sea libre; es decir, $\exp(2\pi(q/p))x \neq x$, $\forall x \in S^2$.

Notemos que en la definición anterior unicamente están ocurriendo identificaciones en la frontera $\partial D^3 = S^2$, las cuales se describen como sigue:

- Primero, el casquete superior se rota en un ángulo $2\pi\frac{q}{p}$ y después se identifican los puntos que estén en el mismo meridiano, los cuales equidistan del ecuador: $(x, y, -z) \sim (r(x, y), z)$. El resultado: un punto en el hemisferio (abierto) superior se identifica con exactamente un punto en el hemisferio (abierto) inferior.
- Segundo, un punto en el ecuador se identifica con todos aquellos que se obtienen con una rotación de $2\pi q/p$.

El espacio $L(p,q)$ también puede ser definido como el resultado de pegar dos toros sólidos a lo largo de sus fronteras, a lo que se le llama su **descomposición de Heegard**

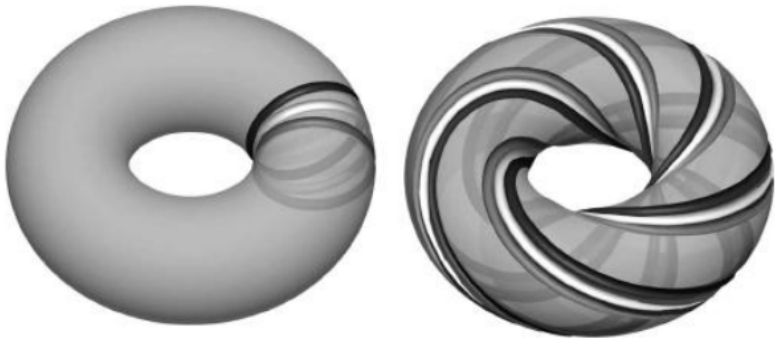


Figure 5: Los espacios lente son importantes en la teoría de 3-variedades, especialmente en descomposiciones de variedades (compactas y orientables) en términos de sumas conexas de variedades *primas*. Ilustración tomada de An Illustrated Introduction to Topology and Geometry, de S. Kalajdzievski.

Los espacios $L(p,q), M(p,q)$ son homeomorfos, siempre que $1 \leq q < p$ son primos relativos; véase Prop. 2.3 en *Lens Spaces*, de J. Grüning.

TERCER ENCUENTRO. Para $p > 1$ entero y la raiz p-ésima de la unidad $\varepsilon = e^{2\pi i/p}$, consideramos $\mathbb{Z}_p \cong \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}\}$. Para $q_1, \ldots, q_n$ primos relativos con p definimos la acción $\mathbb{Z}_p \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$

$$\begin{aligned}\epsilon \cdot (z_1, \ldots, z_n) &= (\varepsilon^{q_1} z_1, \varepsilon^{q_2} z_2, \ldots, \varepsilon^{q_n} z_n) \\ &= ((e^{2\pi i/p})^{q_1} z_1, (e^{2\pi i/p})^{q_2} z_2, \ldots, (e^{2\pi i/p})^{q_n} z_n) \\ &= (e^{2\pi i q_1/p} z_1, e^{2\pi i q_2/p} z_2, \ldots, e^{2\pi i q_n/p} z_n)\end{aligned}$$

Notemos que $\mathbb{Z}_p \subset S^1$, donde cada elemento representa una rotación por el ángulo $2\pi q_i/p$.

El **espacio lente** $L(p; q_1, \ldots, q_n) = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$; si $n = 2$ hacemos $q_1 = 1, q_2 = q$ y escribimos

$$L(p; q_1, \ldots, q_n) = L(p; 1, q) = L(p, q) \cong S^3/\mathbb{Z}_p,$$

como se definió antes; véase Prop. 2.5 en *Lens Spaces*, de J. Grüning.

Observemos que si $p = 2$ la acción de $\mathbb{Z}_2 = \{1, e^{\pi i} = -1\}$ es la acción antipodal en S^{2n-1}, así que $L(2; q_1, \ldots, q_n) \cong \mathbb{RP}^{2n-1}$, con q_i números impares.

Para $n > 1$ la esfera S^{2n-1} es simplemente conexa, la proyección cociente $S^{2n-1} \to L(p; q_1, \ldots, q_n)$ define una proyección cubriente y además $\pi_1(L(p; q_1, \ldots, q_n)) \cong \mathbb{Z}_p$.

En los años 30's K. Reidemeister clasifica los espacios lente de manera topológica:

$$L(p_1, q_1) \cong L(p_2, q_2) \iff q_2 = q_1,\ p_2 = \pm p_1^{\pm 1} (\mod q_1)$$

Por otra parte, se tiene la siguiente clasificación homotópica dada por J.H.C. Whitehead en los 40's:

$$L(p, q) \simeq L(r, s) \iff p = r,\ qs = \pm m^2 (\mod p), p.a.m$$

A partir de esto, los espacios lente $L(7, 1), L(7, 2)$ son homotópicos pero no son homeomorfos.

Variedades de Grassman

Recordemos que un ***k*-marco ortogonal** en $\mathbb{R}^n$ es una k-tupla de vectores de $\mathbb{R}^n$ que forman un conjunto ortonormal de $(\mathbb{R}^n)^k$. La colección de k-marcos ortogonales en $\mathbb{R}^n$

$$V_{k,n}(\mathbb{R}) = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid \langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}\}$$

es llamada la **variedad de Stiefel** $V_{k,n}(\mathbb{R})$, cuya topología está heredada de $(\mathbb{R}^n)^k$ y por lo tanto es Hausdorff.

Notemos que de la definición se tiene $V_{1,n}(\mathbb{R})$ consiste de aquellos vectores de norma 1 en $\mathbb{R}^n$; es decir, $V_{1,n}(\mathbb{R})$ se identifica con la esfera S^{n-1}.

Notemos que un k-marco es llevado a otro k-marco bajo una transformación ortogonal de $O_n(\mathbb{R})$; además, dados dos k-marcos éstos difieren entre si por una transformación ortogonal. Esto prueba que $O_n(\mathbb{R})$ actúa en $V_{k,n}(\mathbb{R})$ de manera transitiva.

Tomemos $a = (a_1, \ldots, a_k) \in V_{k,n}(\mathbb{R})$ y observemos que el estabilizador de a consiste de aquellas matrices que dejan a a fijo y por tanto sólo actúan en el espacio vectorial ortogonal al generado por a; así $O_{n-k}(\mathbb{R})$ es el estabilizador de a y, por tanto, se tiene el homeomorfismo

$$V_{k,n}(\mathbb{R}) \cong O_n(\mathbb{R})/O_{n-k}(\mathbb{R})$$

De manera análoga, al restringir la acción a $SO_n(\mathbb{R})$, se obtiene que $V_{k,n}(\mathbb{R}) \cong SO_n(\mathbb{R})/SO_{n-k}(\mathbb{R})$; de esto se obtiene el homeomorfismo $S^{n-1} \cong SO_n(\mathbb{R})/SO_{n-1}(\mathbb{R})$.

Denotemos por $G_k(\mathbb{R}^n)$ al conjunto de subespacios vectoriales de dim. k en $\mathbb{R}^n$ y consideremos la función sobreyectiva

$$\pi : V_{k,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$$

que envía un k-marco al espacio generado por él. El conjunto $G_k(\mathbb{R}^n)$ tiene estructura de espacio topológico inducida por π función cociente; el resultado es llamado la **variedad de Grassmann** $G_k(\mathbb{R}^n)$.

Observemos que para $k = 1$ la función cociente π coincide con la proyección $S^{n-1} \longrightarrow G_1(\mathbb{R}^n)$; de aquí que$G_1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{RP}^{n-1}$.

La variedad de Grassmann $G_k(\mathbb{R}^n)$ es Hausdorff; la variedad puede ser descrita mediante

$$G_k(\mathbb{R}^n) \cong O_n(\mathbb{R})/(O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R})),$$

donde $O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R})$ es el subgrupo de $O_n(\mathbb{R})$ dado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

La función que asocia a todo espacio vectorial su espacio ortogonal, induce un homeomorfismo de la forma $G_k(\mathbb{R}^n) \cong G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

donde $A \in O_k(\mathbb{R}), B \in (O_k(\mathbb{R}) \times O_{n-k}(\mathbb{R}))$. Finalmente, mencionaremos que el espacio $G_k(\mathbb{R}^n)$ es variedad compacta y conexa de dimensión $k(n-k)$.

Espacios de adjunción

Sean $f : A \to X, f' : A \to X'$ funciones continuas. Dada la unión $X \sqcup X'$ consideremos la relación

$$(X \sqcup X')/\sim, \text{ donde } f(a) \sim f'(a) \iff a \in A$$

y denotamos $X \cup_A X' = (X \sqcup X')/\sim$. En términos geométricos, el espacio de arriba se obtiene al pegar los espacios X, X' a lo largo

del subespacio A. A pesar de que no es evidente en la notación, la construcción anterior depende de la función f.

En general, el *pushout* de las funciones f, f' es el espacio Y que determina un cuadrado conmutativo:

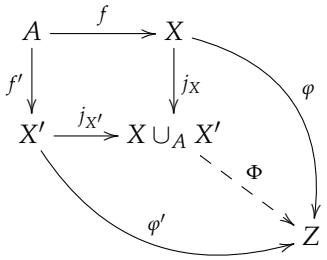
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \vdots \\ X' & \dashrightarrow & Y \end{array}$$

donde las funciones sin etiqueta son restricciones de la función cociente $X \sqcup X' \to Y$.

Consideremos las funciones $j_X : X \to X \cup_A X'$, $j_{X'} : X \to X \cup_A X'$ que mandan a cada $x \in X, x \in X'$ a su clase en el cociente. Notemos que $j_X, j_{X'}$ son continuas y además satisfacen $j_X \circ f = j_{X'} \circ f'$. Más aún, las funciones satisfacen la siguiente propiedad universal: para cualesquiera funciones $\varphi : X \to Z$, $\varphi' : X' \to Z$ tales que $\varphi \circ f = \varphi' \circ f'$, existe una única función

$$\Phi : X \cup_A X' \longrightarrow Z$$

tal que $\Phi \circ j_X = \varphi$, $\Phi \circ j_{X'} = \varphi'$. Es decir, se tiene un diagrama conmutativo de la forma



El espacio $X \cup_A X'$ definido arriba es único, para f, f' funciones dadas. Al ser un espacio cociente de la unión $X \sqcup X'$ no hereda todas las propiedades que los espacios X, X' puedan tener.

Algunas construcciones elementales pueden ser obtenidas con esta nueva definición: notemos que para conjuntos A, B su unión se obtiene del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \vdots \\ A & \dashrightarrow & A \cup B \end{array}$$

donde todas las funciones están dadas por inclusiones.

Por otro lado, la construcción anterior permite obtener nuevos espacios topológicos: la **suma *wedge*** (ó **ramillete**) $X \vee X'$ de dos espacios se construye escogiendo dos punto distinguidos $x \in X, x' \in X'$ y usando las funciones

$$f : \{*\} \longmapsto X, \qquad f' : \{*\} \longmapsto X'$$

que envian a $*$ a los punto x, x', respectivamente. La construcción puede ser generalizada a una cantidad finita de espacios con puntos distinguidos de manera inductiva:

$$X_1 \vee \cdots \vee X_n = (X_1 \vee \cdots \vee X_{n-1}) \vee X_n.$$

Para $h, l \in \mathbb{Z}$ consideramos el espacio de adjunción

$$M_{h,l} := (D^4 \times S^3) \bigcup_{\varphi} (D^4 \times S^3),$$

donde $\varphi : S^3 \times S^3 \to S^3 \times S^3$ está dado por $\varphi(x, y) = (x, x^h y x^l)$. Este espacio es homeomorfo a una esfera (de dimensión 7 si $h + l = \pm 1$) por lo que es llamado una **esfera topológica**; sin embargo, $M_{h,l}$ tiene una estructura diferencial distinta a la estándar así que es llamada una esfera topológica **exótica**.

Para un espacio topológico X, $A \subseteq X$ y $f : A \to Y$ función continua se tiene el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & X \cup_f Y \end{array}$$

Notemos que si $Y = \{*\}$ entonces el espacio de adjunción $X \cup_f Y \cong X/A$.

El **cono** CX de un espacio X se define como el cociente $X \times I / X \times \{0\}$. Dada una función continua $f : X \to Y$ consideramos f' como la composición $X \to X \times \{1\} \to CX$. El *pushout* de f, f', obtenido como el espacio de adjunción $C_f = Y \cup_f CX$, es llamado el **cono** de f.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \vdots \\ CX & \dashrightarrow & C_f \end{array}$$

Espacios celulares

La **adjunción de una n-celda** a través de una funcion $f : S^{n-1} \to X$ corresponde al caso de un espacio de adjunción en el que f' es la inclusión $S^{n-1} \to D^n$. En tales condiciones el cociente se denota por

$$X \cup_{S^{n-1}} D^n = X \cup_f e^n,$$

donde e^n es la imagen (homeomorfa) de D^n, y es llamada la **n-celda adjuntada** y f es la **función de adjunción**. La imagen de la restriccion de la funcion

$$\overline{f} : D^n \longrightarrow X \cup_f e^n$$

al interior de D^n es llamada una **n-celda abierta**.

Si la función de adjunción $f : S^{n-1} \to X$ es constante, entonces recuperamos la suma wedge $X \cup_f e^n \cong X \vee S^n$.

En la construcción anterior es posible adjuntar una familia de celdas al tomar una familia de funciones $\{f_i : S_i^{n-1} \to X\}_{i \in I}$ y tomar la unión disjunta

$$f = \sqcup_i f_i : \sqcup_i S_i^{n-1} \to X$$

Un **espacio celular de dim.** 0 es un espacio discreto; sus elementos son llamados 0-celdas (o **vértices**). Dado un espacio celular X^0 de dim. 0 definimos un **espacio celular de dim.** 1 al espacio obtenido por la adjunción de una colección de 1-celdas:

$$X^1 := X^0 \cup_f e^1,$$

Como antes, e^1 es llamada 1-celda abierta o **arista** de X^1. Dado un espacio celular X^1 de dimensión 1 definimos el **espacio celular de dim.** 2 como el espacio de adjunción

$$X^2 := X^1 \cup_f e^2,$$

cuyas 2-celdas sn también llamadas **caras**.

De manera inductiva definimos un espacio celular de dim. n como el espacio de adjunción

$$X^n := X^{n-1} \cup_f e^n,$$

donde X^{n-1} es un espacio de dimensión $n-1$.

Un **espacio celular o CW complejo**[1] es un espacio X obtenido como unión creciente de espacios celulares

$$\emptyset = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X^{n-1} \subset \cdots$$

con $X = \cup_{n=0}^{\infty} X^n$. Equivalentemente, se dice que la colección de arriba es una **descomposición celular** para X. La unión de todas las celdas de dimensión $\leq n$ es llamado el **n-esqueleto de** X. Un espacio celular es **finito/numerable** si contiene una cantidad finita/numerable de celdas.

[1] En algunos contextos se omite el término *complejo* para que no se confunda con otros como el de complejo de cadenas

Espacios de configuración

En la Mecánica Clásica, el espacio de configuraciones de un sistema (mecánico, físico) se refiere al conjunto de parámetros que definen a las partes que constituyen a dicho sistema. Estos parámetros pueden incluir la posición, la velocidad o la temperatura.

Para un entero $k > 1$ y un espacio topológico X consideramos el subespacio de X^k dado por

$$F_k(X) = \{(x_1, \ldots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j, \text{ para } i \neq j\}.$$

La primera observación que se desprende de la definición es que $F_1(X) = X$. Por otro lado,

$$F_2(X) = \{(x, y) \in X^2 \mid x \neq y\} = X^2 \backslash \triangle_2,$$

donde $\triangle_2 = \{(x, x) \mid x \in X\}$ es el subespacio diagonal de X^2. En general $F_k(X)$ se obtiene del producto cartesiano X^k removiendo el subespacio

$$\triangle_k = \{(m_1, \ldots, m_k) \mid m_i = m_j, \text{ para algún } i \neq j\}$$

llamado la diagonal "gorda" de X^k.

Al ser X Hausdorff $F_k(X)$ es subespacio abierto de X^k; la topología que se considera en $F_k(X)$ es la inducida como subespacio. Más aún, cuando X es una n-variedad topológica, entonces $F_k(X)$ también es una variedad topológica de dimensión kn.