
Homología
singular
Miguel A.
Maldonado
UAZ
2024

Notas sobre homología singular

Consideremos el q-simplejo estándar Δ^q y definamos su i-ésima cara, con $i=0,1,\dots,q$, como la función

$$\varepsilon_q^i : \Delta^{q-1} \longrightarrow \Delta^q$$

$x_i = e_i$, vector canónico

$$\langle x_0,\dots,x_{q-1}\rangle \longmapsto \langle x_0,\dots,\hat{x}_i,\dots,x_q\rangle$$

Algunas propiedades

a) $\varepsilon_q^i(x_j)=x_j$, si $j<i$

b) $\varepsilon_q^i(x_j)=x_{j+1}$, si $j\geq i$

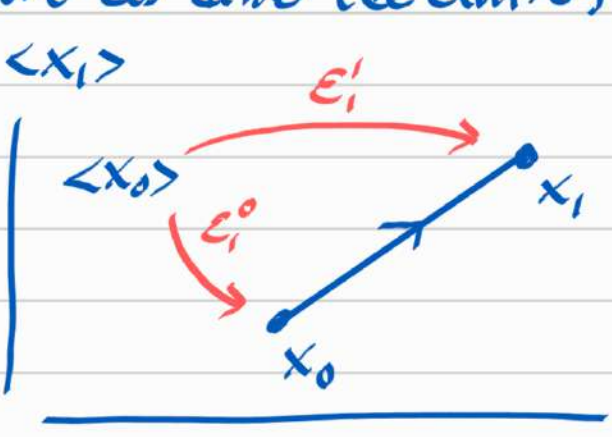
c) Para $q\geq 2$ & $0\leq j<i\leq q-1$ se tiene:

$$\varepsilon_q^i\circ\varepsilon_{q-1}^j=\varepsilon_q^j\circ\varepsilon_{q-1}^{i-1}$$

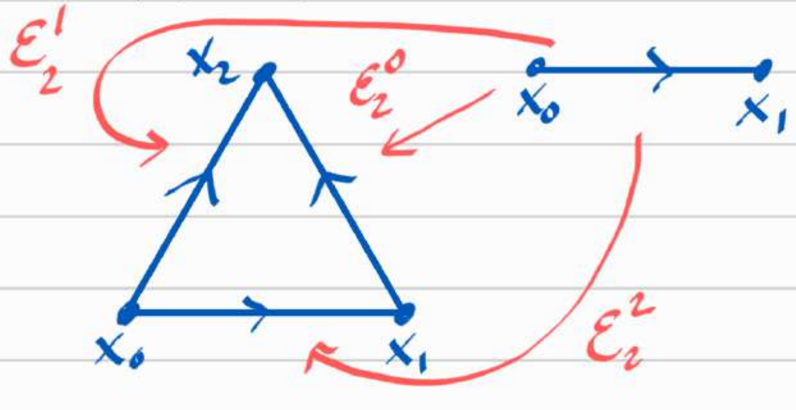
como funciones $\Delta^{q-1}\longrightarrow\Delta^{q+1}$. (basta evaluar) $\triangleleft$

Ejemplos

a) $\Delta^1=\langle x_0,x_1\rangle$ tiene dos caras (de dim. 0): $\langle x_0\rangle$, $\langle x_1\rangle$



b) $\Delta^2=\langle x_0,x_1,x_2\rangle$ tiene tres caras:



$\triangleleft$

Sea X espacio topológico. Un q-simplejo singular en X es una función continua $\sigma: \Delta^q \longrightarrow X$. El grupo de q-cadenas singulares de X $S_q(X)$ es el gpo. abeliano generado por los q-simplejos singulares en X:

$$S_q(X) := \left\{ \sum_{\text{finito}} n_i \sigma_i \mid \sigma_i : \Delta^q \to X,\ n_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Así, $S_0(X)$ está generado por puntos de X (imágenes de 0-simplejos singulares); $S_1(X)$ está generado por caminos en X (cerrados, libres), etc.

Definimos el q-ésimo operador frontera mediante

$$\partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$$
$$\sigma \longmapsto \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_q^i$$

i-ésima cara de σ

Lema Bajo las condiciones anteriores

$$S_*(X): \quad \cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \cdots\cdots \to S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0$$

es un complejo de cadenas.

Lema Bajo las condiciones anteriores

$$S_*(X): \quad \cdots \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \cdots\cdots \to S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \to 0$$

es un complejo de cadenas, i.e. $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, $\forall q \geq 0$

Dem Sea $\sigma \in S_{q+1}(X)$ y notemos que

$$(\partial_q \circ \partial_{q+1})(\sigma) = \partial_q\left(\sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_{q+1}^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i \, \partial_q(\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^i)$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1} \sum_{j=0}^{q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^i \circ \varepsilon_q^j)$$

$$= \sum_{j<i=1}^{q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^i \circ \varepsilon_q^j) + \sum_{j \geq i=0}^{q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^i \circ \varepsilon_q^j)$$

$$= \sum_{j<i=1}^{q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^j \circ \varepsilon_q^{i-1}) + \sum_{j \geq i=0}^{q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^i \circ \varepsilon_q^j)$$

hacemos $i' = j$, $j' = i-1$

$$= \sum_{i' \leq j'=0}^{q} (-1)^{i'+j'+1} (\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^{i'} \circ \varepsilon_q^{j'}) + \sum_{j \geq i=0}^{q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^i \circ \varepsilon_q^j)$$

$$= 0$$ (como se quería) ∎

El complejo anterior es llamado el complejo de cadenas singulares de X. Definimos también

$$Z_q(X) := \mathrm{Ker}(\partial_q) : \text{ q-ciclos singulares de X}$$

$$B_q(X) := \mathrm{im}(\partial_{q+1}) : \text{ q-fronteras singulares de X}$$

$$H_q(X) := \frac{Z_q(X)}{B_q(X)} : \text{ q-ésimo gpo. de homología singular de X}$$

Ejemplo Para $X = \{pt.\}$, $H_0(X) = \mathbb{Z}$, $H_q(X) = 0$, $\forall q \geq 1$.

Sol Notemos que $\forall q \geq 0$, todo q-simplejo singular es constante, así $S_q(X) = \langle \sigma_q \rangle \cong \mathbb{Z}$, $\forall q \geq 0$. Además notemos que

$$\partial_q(\sigma_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, \sigma_q \circ \varepsilon_q^i$$

único simplejo singular en dim. q-1.

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \, \sigma_{q-1} = \sigma_{q-1} + \sigma_{q-1} + \cdots + (-1)^q \sigma_{q-1}$$

$$= \begin{cases} 0, & q \text{ impar} \\ \sigma_{q-1}, & q \text{ par} \end{cases}$$

El complejo de cadenas singulares entonces tiene la forma

$$\cdots \xrightarrow{0} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{S_4(X)}} \xrightarrow{id} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{S_3(X)}} \xrightarrow{0} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{S_2(X)}} \xrightarrow{id} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{S_1(X)}} \xrightarrow{0} \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{S_0(X)}} \xrightarrow{0} 0$$

Observemos que la homología satisface:

$$\text{si } q \geq 1 \qquad H_q(X) = \begin{cases} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0 & , q \text{ impar} \\ 0/0 = 0, & q \text{ par} \end{cases}$$

$$H_0(X) = \mathbb{Z}/0 \cong \mathbb{Z}. \quad \blacksquare$$

Proposición Consideremos $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ la descomposición por componentes arco conexas. Entonces $H_q(X) \cong \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i)$

Dem Dado que Δ^q es arco-conexo y $\sigma : \Delta^q \to X$ es f. continua, se tiene que $\sigma(\Delta^q) \subseteq X_i$, p.a. $i \in I$; más aun, tenemos

$$\{\sigma_i : \Delta^q \to X\} = \bigcup_{i \in I} \{\sigma : \Delta^q \to X_i\}$$

y por tanto $S_q(X) = \bigoplus_{i \in I} S_q(X_i)$. Veremos que esta descomposición se hereda a ciclos y fronteras...

Si X_i es la componente que contiene a $\sigma(\Delta^q)$, entonces las caras $\sigma \circ \varepsilon_q^i \subseteq X_i$. Por otro lado, si $\omega \in Z_q(X)$ es un ciclo entonces podemos escribir $\omega = \sum_{i \in I} \omega_i$, $\omega_i \in Z_q(X_i)$.

Esto induce un homomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : Z_q(X) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i) \\ \omega &\longmapsto \sum_{i \in I} [\omega_i] \end{aligned}$$

Por otro lado, si $\omega = \partial_{q+1}(\omega')$ tomamos $\omega' = \sum_{i \in I} \omega_i'$, $\omega_i' \in S_{q+1}(X)$, para tener que $\partial_{q+1}(\omega_i') = \omega_i$. En particular

$$\varphi(\omega) = \sum_{i \in I} [\omega_i] = \sum_{i \in I} [\partial_{q+1}(\omega_i')] = 0,$$

por lo que φ pasa al cociente por fronteras:

$$\overline{\varphi} : H_q(X) \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i)$$

Afirm $\overline{\varphi}$ es isomorfismo. Dado $\sum_{i \in I} [\omega_i] \in \bigoplus_{i \in I} H_q(X_i)$ tenemos que $\sum_{i \in I} [\omega_i] = \overline{\varphi}\left(\left[\sum_{i \in I} \omega_i\right]\right)$ por lo que $\overline{\varphi}$ es sobreyectivo.

Finalmente, si $\overline{\Psi}([\omega])=0$ tomamos $\omega_i = \partial_{q+1}(x_i)$

por lo que $\omega = \partial_{q+1}(\sum_{i\in I} x_i) \Rightarrow [\omega] = [\partial_{q+1}(\sum x_i)] = 0$

$$\therefore H_q(X) \cong \bigoplus_{i\in I} H_q(X_i) \blacksquare$$

octubre 8

Teorema $H_0(X)$ es abeliano libre, con base el conjunto de componentes arco-conexas; i.e. el rango de $H_0(X)$ es el número de componentes de X.

Dem Tomemos el homomorfismo de aumentación

$$\varepsilon : S_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \sum n_i \sigma_x \longmapsto \sum n_i$$

y notemos que es sobre $\Rightarrow \dfrac{S_0(X)}{Ker(\varepsilon)} \cong \mathbb{Z}$. Afirm $Ker\,\varepsilon = B_0(X)$

Tomemos $\sigma \in S_1(X)$ y notemos que $\partial_1(\sigma) \in B_0(X)$.
Si $\partial_1(\sigma) = x_f - x_i$, entonces $\varepsilon(\partial_1(\sigma)) = \varepsilon(x_f - x_i) = 1-1=0$
$\Rightarrow B_0(X) \subseteq Ker(\varepsilon)$

Por otro lado, sea $x_0 \in X$ fijo. Para $x \in X$ tomamos $\sigma_x : \Delta' \to X$ trayectoria de x_0 a x. Tomemos $\sum_{i=0}^{k} n_i x_i \in Ker(\varepsilon)$; es decir, $\sum_{i=0}^{k} n_i = 0$. De aquí se sigue que

$$\sum_{i=0}^{k} n_i x_i = \sum_{i=0}^{k} n_i x_i - \sum_{i=0}^{k} n_i x_0 = \sum_{i=0}^{k} n_i (x_i - x_0) = \sum_{i=0}^{k} n_i \partial_1(\sigma_{x_i}) \in B_0(X)$$

$\Rightarrow Ker(\varepsilon) \subseteq B_0(X)$ $\qquad \therefore B_0(X) = Ker(\varepsilon) \blacksquare$

Corolario Si X, Y arco-conexas & $f: X \to Y$ continua, entonces

$$f: H_0(X) \longrightarrow H_0(Y)$$

es isomorfismo.

Observemos que si A es convexo, entonces $H_0(A) \cong \mathbb{Z}$ y $H_q(A) = 0$, $\forall q \geq 1$. Un espacio arco-conexo X es llamado <u>acíclico</u> si $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ & $H_q(X) = 0$, $\forall q \geq 1$.

Consideremos el homo. de aumentación $\varepsilon: S_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ y lo extendemos a un morfismo de complejos de cadenas

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, "0"] & \\
0 \arrow[r] & \tilde{S}_2(X) = S_2(X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & S_2(X) \arrow[r, "\varepsilon_2 = 0"] \arrow[d, "\partial_2"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{S}_1(X) = S_1(X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & S_1(X) \arrow[r, "\varepsilon_1 = 0"] \arrow[d, "\partial_1"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{S}_0(X) = \operatorname{Ker}(\varepsilon_0) \arrow[r] & S_0(X) \arrow[r, "\varepsilon_0 = \varepsilon"] & \mathbb{Z} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Obtenemos una suc exacta corta de complejos de cadenas

$$0 \longrightarrow \tilde{S}_*(X) \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow S_*(\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Notemos que $H_0(S_*(\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}$ & $H_q(S_*(\mathbb{Z}))=0$, $\forall q\geq 1$

La homología del complejo $\tilde{S}_*(X)$ es llamada la homología reducida de X; notación: $\tilde{H}_q(X)$

La sucesión exacta larga en homología tiene la forma

$$0 \to \tilde{H}_0(X) \to H_0(S_*(X)) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{H}_0(X) \cong \operatorname{Ker}(\varepsilon : H_0(X) \longrightarrow \mathbb{Z})$$

En dimensiones mayores se tiene $\tilde{H}_q(X) \cong H_q(X)$, $\forall q\geq 1$.

Obs: si $H_0(X)\cong\mathbb{Z}$, entonces $\tilde{H}_0(X)=0$; de aquí viene el adjetivo reducida.

Propiedades funtoriales Sea $f: X \to Y$ función continua.

$$S_q(f): S_q(X) \longrightarrow S_q(Y) \quad , \forall q\geq 0$$
$$\sigma \longmapsto f\circ\sigma$$

que se extiende mediante

$$S_q(f)\left(\sum n_i\sigma_i\right) = \sum n_i S_q(f)(\sigma)$$
$$= \sum n_i (f\circ\sigma_i)$$

Lema La familia $S_*(f) = \{S_q(f)\}_{q\geq 0}$ es morfismo de complejos de cadenas

Dem. Basta ver que se tienen cuadrados conmutativos

$$\begin{tikzcd} S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, "S_q(f)"'] & S_{q-1}(X) \arrow[d, "S_{q-1}(f)"] \\ S_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"] & S_{q-1}(Y) \end{tikzcd}$$

$$\partial_q(S_q(f)(\sigma)) = \partial_q(f\circ\sigma)$$
$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (f\circ\sigma)\circ\varepsilon_q^i$$
$$= f\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i(\sigma\circ\varepsilon_q^i)\right) = S_{q-1}(f)\left(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\,\sigma\circ\varepsilon_q^i\right)$$
$$= S_{q-1}(f)(\partial_q(\sigma)) \quad \blacksquare$$

Por lo anterior, toda función $f: X \to Y$ induce homomorfismos a nivel de homología:

$$H_q(f): H_q(X) \longrightarrow H_q(Y), \quad \forall q\geq 0$$
$$[w] \longmapsto [S_q(f)(w)] = [f\circ w]$$

Más aun, la homología singular define una colección de funtores covariantes:

$$H_q: \mathcal{T}op \longrightarrow AbGp$$
$$X \longmapsto H_q(X)$$

Es decir, $H_q(g\circ f) = H_q(g)\circ H_q(f)$ & $H_q(1_X) = 1_{H_q}$, $\forall q\geq 0$

Algunas consecuencias:

$\boxed{\#1}$ Si $A\subseteq X$ es retracto, entonces $\forall q\geq 0$ se tienen homomorfismos inyectivos $H_q(A)\hookrightarrow H_q(X)$.

Tomemos la retracción $r: X\longrightarrow A$; es decir, $r\circ i = 1_A$, con $i: A\hookrightarrow X$ inclusión. Tomamos homomorfismos inducidos

$$\begin{tikzcd} H_q(A) \arrow[r, "H_q(i)"] \arrow[rr, bend right, "1_{H_q(A)}"'] & H_q(X) \arrow[r, "H_q(r)"] & H_q(A) \end{tikzcd}$$

$\boxed{\#2}$ Si $f: X\longrightarrow Y$ es f. constante, entonces

$$H_q(f): H_q(X)\longrightarrow H_q(Y)$$

es homomorfismo trivial, $\forall q>0$

Hagamos $f(x) = y_0$, $\forall x\in X$ y observemos que f factoriza como la composición $X\longrightarrow \{y_0\}\longrightarrow Y$; entonces

$$\Rightarrow H_q(f): H_q(X)\longrightarrow H_q(\{y_0\})\longrightarrow H_q(Y)$$

es homomorfismo trivial pues $H_q(\{y_0\}) = 0$, $\forall q>0$.

Invarianza homotópica de homología

Teorema Si $f, g : X \to Y$ son f. homotópicas, $H_q(f) = H_q(g)$, $\forall q \geq 0$

Dem Recordemos que $f \simeq g \equiv \exists H : X \times I \to Y$, $H(x,0) = f(x)$
$H(x,1) = g(x)$

Notemos que para $i_0, i_1 : X \to X \times I$, $x \mapsto (x,0), (x,1)$ tenemos

$$f(x) = (H \circ i_0)(x), \quad g(x) = (H \circ i_1)(x)$$

Tomemos los homomorfismos inducidos en cadenas singulares.

$$\begin{tikzcd} S_*(X) \arrow[r, shift left, "S_*(i_1)"] \arrow[r, shift right, "S_*(i_0)"'] & S_*(X \times I) \arrow[r, "S_*(H)"] & S_*(Y) \end{tikzcd}$$

Si $S_*(i_1) \simeq S_*(i_0)$ entonces $S_*(f) = S_*(H) \circ S_*(i_1) \simeq S_*(H) \circ S_*(i_0) = S_*(g)$

finalmente, si $S_*(f) \simeq S_*(g) \Rightarrow H_*(f) = H_*(g)$.

Algebraicamente debemos definir diagramas en cada dimensión

$$\begin{tikzcd} & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[dl, "D_q"'] \arrow[d, shift right, "S_q(i_1)"'] \arrow[d, shift left, "S_q(i_0)"] & S_{q-1}(X) \arrow[dl, "D_{q-1}"] \\ S_{q+1}(X \times I) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & S_q(X \times I) & \end{tikzcd}$$

con $\partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = S_q(i_1) - S_q(i_0)$, $\forall q$

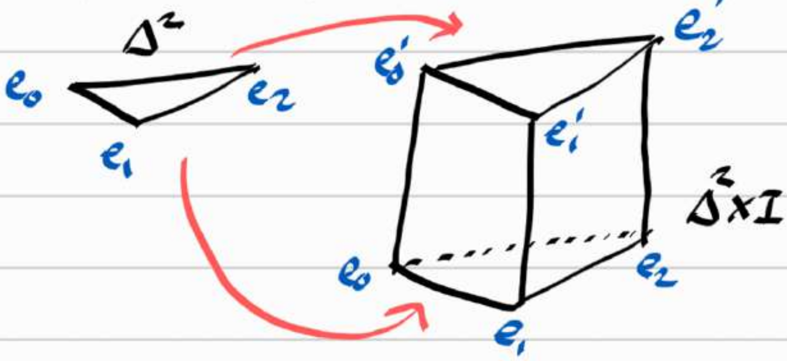
Caso especial: $X = \Delta^q$. Tomemos $\sigma = \langle e_0, e_1, \dots, e_q \rangle$ como f. identidad $\Delta^q \to \Delta^q$.

En $\Delta^q \times I$ hacemos $e_i' := (e_i, 1)$, $e_i = (e_i, 0)$

Definimos

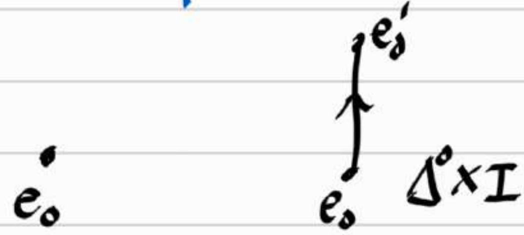
op. prisma

$$D_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle e_0, \dots, e_i, e_i', \dots, e_q' \rangle$$



Ejem: $q = 0$

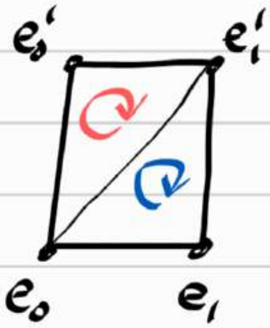
$\Delta^0 =$



$$D_0(\sigma) = \langle e_0, e_0' \rangle$$

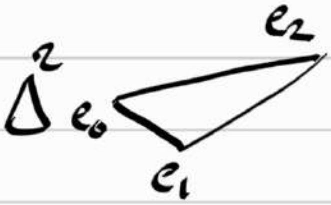
$q = 1$

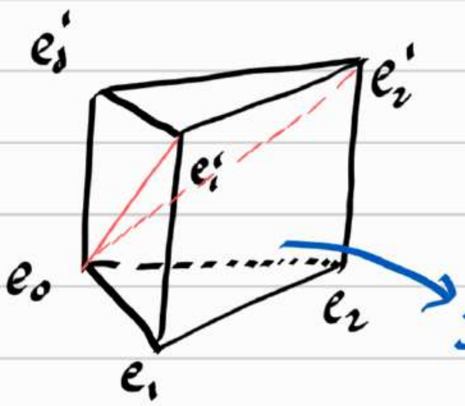
Δ^1



$$D_1(\sigma) = \langle e_0, e_0', e_1' \rangle - \langle e_0, e_1, e_1' \rangle$$

$q = 2$





$$D_2(\sigma) = \langle e_0, e_0', e_1', e_2' \rangle - \langle e_0, e_1, e_1', e_2' \rangle + \langle e_0, e_1, e_2, e_2' \rangle$$

3 tetraedros

∎

Notemos que
$$\partial_1 D_0(\sigma) = \partial_1(\langle e_0, e_0' \rangle)$$
$$= \langle e_0' \rangle - \langle e_0 \rangle$$
$$= S_0(i_1)(e_0) - S_0(i_0)(e_0)$$

$$\Rightarrow \partial_1 \circ D_0 = S_0(i_1) - S_0(i_0)$$

Para $q=1$ notamos que

$$(\partial_2 \circ D_1)(\sigma) + (D_0 \circ \partial_1)(\sigma) = \partial_2\left(\langle e_0, e_0', e_1'\rangle - \langle e_0, e_1, e_1'\rangle\right)$$

$$+ D_0\left(\langle e_1\rangle - \langle e_0\rangle\right)$$

$$= \partial_2(\langle e_0, e_0', e_1'\rangle) - \partial_2(\langle e_0, e_1, e_1'\rangle) + D_0(\langle e_1\rangle) - D_0(\langle e_0\rangle)$$

$$= \langle e_0', e_1'\rangle - \cancel{\langle e_0, e_1'\rangle} + \cancel{\langle e_0, e_0'\rangle} - \cancel{\langle e_1, e_1'\rangle} + \cancel{\langle e_0, e_1'\rangle} - \langle e_0, e_1\rangle$$

$$+ \cancel{\langle e_1, e_1'\rangle} - \cancel{\langle e_0, e_0'\rangle} = \langle e_0', e_1'\rangle - \langle e_0, e_1\rangle$$

$$= S_1(i_1)(\langle e_0, e_1\rangle) - S_1(i_0)(\langle e_0, e_1\rangle)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_2 \circ D_1 + D_0 \circ \partial_1 = S_1(i_1) - S_1(i_0)$$

En general, si $\sigma = \langle e_0, \dots, e_q\rangle$ (como f. identidad), tenemos

$$(\partial_{q+1} \circ D_q)(\sigma) + (D_{q-1} \circ \partial_q)(\sigma) = S_q(i_1)(\sigma) - S_q(i_0)(\sigma)$$

Caso general: tomamos $\sigma : \Delta^q \longrightarrow X$ y definimos

$$D_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X \times I), \quad \sigma \longmapsto S_{q+1}(\sigma \times id) \circ D_q(\langle e_0, \dots, e_q\rangle)$$

$$\begin{tikzcd}
S_q(\Delta^q) \arrow[r, "D_q"] \arrow[d, "S_q(\sigma)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S_{q+1}(\Delta^q \times I) \arrow[d, "S_{q+1}(\sigma \times id)"] \\
S_q(X) \arrow[r, "D_q"] & S_{q+1}(X \times I)
\end{tikzcd}$$

Notemos que el operador prisma D_q satisface

$$\partial_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = S_q(i_1) - S_q(i_0)$$

Por tanto $S_q(i_1) \simeq S_q(i_0)$ (algebraico), como se quería. ■

Corolario. Si $f: X \to Y$ es equivalencia homotópica, entonces $H_q(f): H_q(X) \to H_q(Y)$ es isomorfismo, $\forall q \geq 0$

Dem Tomamos $g: Y \to X$ con $g \circ f \simeq 1_X$, $f \circ g \simeq 1_Y$

$$\Rightarrow \quad H_q(g) \circ H_q(f) = H_q(g \circ f) = H_q(1_X) = 1_{H_q(X)}$$

$$H_q(f) \circ H_q(g) = H_q(f \circ g) = H_q(1_Y) = 1_{H_q(Y)}$$

$$\Rightarrow \quad H_q(g) = H_q(f)^{-1}$$ ■

Ejemplos #1 Recordemos que $\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \simeq S^1$ a través de

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\} \longrightarrow S^1$$
$$\bar{x} \longmapsto \bar{x}/\|\bar{x}\|$$

Por lo anterior, $H_q(\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}) \cong H_q(S^1)$, $\forall q \geq 0$

#2 Dado que D^n es contráctil, $D^n \simeq \{pt\} \Rightarrow H_q(D^n) \cong H_q(pt)$

$$\Rightarrow \quad H_q(D^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases}$$ ■

Homología relativa (revisar lo que se hizo en el caso simplicial)

En términos algebraicos se tiene la siguiente situación: para un complejo de cadenas C_* y un subcomplejo $D_* \subseteq C_*$, consideramos el complejo $(C/D)_*$ con $(C/D)_q = C_q/D_q$.

Se tiene una s.e.c. de complejos de cadenas:

$$0 \longrightarrow D_* \longrightarrow C_* \longrightarrow (C/D)_* \longrightarrow 0$$

y su correspondiente s.e.l. en homología.

Para X espacio topológico y $A \subseteq X$ subespacio notamos que $S_*(A)$ es subcomplejo de $S_*(X)$; el complejo cociente

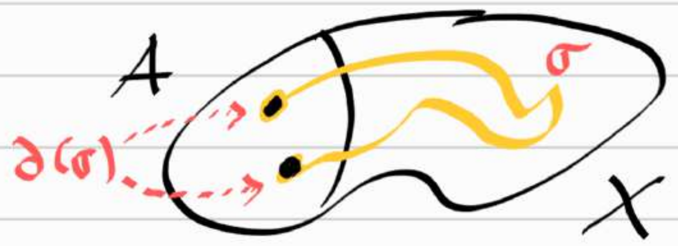
$$S_*(X,A) := \frac{S_*(X)}{S_*(A)}$$

es llamado el **complejo de cadenas relativas** para el par (X,A).

$$Z_q(X,A) := \operatorname{Ker}\left(S_q(X,A) \longrightarrow S_{q-1}(X,A)\right)$$ q-ciclos relativos

$$B_q(X,A) := \operatorname{im}\left(S_{q+1}(X,A) \longrightarrow S_q(X,A)\right)$$ q-fronteras relativas

Como en el caso simplicial un ciclo relativo $c \in S_q(X)$ satisface $\partial_q(c) \in S_{q-1}(A)$



La homología de $S_*(X,A)$ se denota por $H_*(X,A) := H_*(S_*(X,A))$ y la llamamos la **homología relativa del par (X,A)**. S.e.l. asociada

$$\cdots \longrightarrow H_{q+1}(A) \longrightarrow H_{q+1}(X) \longrightarrow H_{q+1}(X,A) \longrightarrow H_q(A) \longrightarrow H_q(X) \longrightarrow H_q(X,A) \longrightarrow \cdots$$

La sucesión exacta anterior es natural respecto a funciones entre pares: dada una función $f:(X,A) \longrightarrow (Y,B)$ se tienen homomorfismos inducidos a nivel de cadenas singulares

$$S_q(f): S_q(X,A) \longrightarrow S_q(Y,B)$$

y a nivel de homología relativa:

$$H_q(f): H_q(X,A) \longrightarrow H_q(Y,B)$$

que produce un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_q(A) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_q(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_q(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & H_{q-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_q(B) \arrow[r] & H_q(Y) \arrow[r] & H_q(Y,B) \arrow[r] & H_{q-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ejemplo tomamos $A=\{x_0\}\subseteq X$ y recordemos que $H_q(A)=0$, $\forall q\geq 1$, $H_0(A)=\mathbb{Z}$. La sucesión en homología satisface:

$\boxed{q\geq 1}$ $$\cdots \to \cancel{H_q(A)}^{0} \to H_q(X) \to H_q(X,A) \to \cancel{H_{q-1}(A)}^{0} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad H_q(X)\cong H_q(X,A)=H_q(X,x_0)$$

$\boxed{q=0}$ $$0\to H_0(A)\xrightarrow{H_0(i)} H_0(X)\xrightarrow{H_0(j)} H_0(X,A)\to 0$$

Notemos que para $f: X\to A=\{x_0\}$ (f constante) tenemos que $H_0(f)\circ H_0(i)=H_0(f\circ i)=1$; así que la sucesión se escinde y obtenemos un isomorfismo

$$H_0(X)\cong H_0(X,x_0)\oplus H_0(x_0) \quad \blacksquare$$

Dos funciones $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ son homotópicas si $\exists$ una homotopía de pares

$$H : (X \times I, A \times I) \longrightarrow (Y, B)$$

tal que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ y $\forall t \in I$

$(X \times \{t\}, A \times \{t\}) \xrightarrow{H} (Y, B)$ es función de pares.

Proposición Si $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ son homotópicas, entonces

$$H_q(f) = H_q(g) : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B), \quad \forall q \geq 0$$

Dem La homotopía H tal que $f \underset{H}{\simeq} g$ induce una homotopía (algebraica) entre $S_q(f)$, $S_q(g)$, que lleva $S_q(A)$ en $S_q(B)$; al pasar al cociente se tiene una homotopía entre los homomorfismos $S_q(f), S_q(g) : S_q(X, A) \longrightarrow S_q(Y, B)$. ■

Ejemplo Para $A \subseteq X$ retracto tomamos la retracción r y notamos que $r \circ i = 1_A$, con $i : A \hookrightarrow X$ inclusión.

$$\Rightarrow \quad i_* : H_q(A) \longrightarrow H_q(X) \quad \text{mono}$$

$$r_* : H_q(X) \longrightarrow H_q(A) \quad \text{epi}$$

$$\& \quad r_* \circ i_* = 1_{H_q(A)}$$

Tomamos que una parte de la s.e.l. del par (X,A):

$$0 \to H_q(A) \underset{i_*}{\longrightarrow} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X,A) \to 0$$

$$r_*: H_q(X) \to H_q(A)$$

y observamos que la sucesión se escinde (vía r_*), así que

$$H_q(X) \cong H_q(A) \oplus H_q(X,A), \ \forall q$$

Sucesión exacta para una tercia

Sean $B \subseteq A \subseteq X$ y consideremos las inclusiones

$$i:(A,B) \to (X,B), \quad j:(X,B) \to (X,A)$$

y observemos que
$$\frac{S_q(X)/S_q(B)}{S_q(A)/S_q(B)} \cong S_q(X)/S_q(A)$$

De esto obtenemos una s.e.c de complejos de cadenas:

$$0 \to S_q(A)/S_q(B) \to S_q(X)/S_q(B) \to \frac{S_q(X)}{S_q(A)} \to 0$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$0 \to S_q(A,B) \xrightarrow{i_*} S_q(X,B) \xrightarrow{j_*} S_q(X,A) \to 0$$

$$x + S_q(B) \longmapsto i(x) + S_q(B)$$

$$y + S_q(B) \longmapsto y + S_q(A)$$

y su correspondiente s.e.l. en homología:

$$\hookrightarrow H_q(A,B) \to H_q(X,B) \to H_q(X,A) \to$$

$$\hookrightarrow H_{q-1}(A,B) \to H_{q-1}(X,B) \to \cdots$$

s.e.l. en homología de (X,A,B).

Tomemos $x_0 \in X$ y consideremos la composición

$$q_X : \tilde{S}_*(X) \longrightarrow S_*(X) \longrightarrow S_*(X,\{x_0\})$$ morfismo de complejos de cadenas

Afirm q_X induce el isomorfismo

hom. reducida $\tilde{H}_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(X,\{x_0\})$ hom. relativa

Sol Tomemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \tilde{S}_*(x_0) & \longrightarrow & S_*(x_0) & \longrightarrow & S_*(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{i} & & \downarrow i & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{S}_*(X) & \longrightarrow & S_*(X) & \longrightarrow & S_*(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Por el Lema de la Serpiente se tiene sucesión exacta de la forma

$$0 \to \operatorname{Ker}\tilde{i} \to \operatorname{Ker} i \to \cancel{\operatorname{Ker} 1} \to \operatorname{coker}\tilde{i} \to \operatorname{coker} i \to \cancel{\operatorname{coker} 1} \to 0$$

$\cancel{\operatorname{Ker} 1} = 0$, $\cancel{\operatorname{coker} 1} = 0$

$$\Rightarrow \operatorname{coker}\tilde{i} = \operatorname{coker} i$$

Esto es $\dfrac{\tilde{S}_*(X)}{\tilde{S}_*(x_0)} \cong \dfrac{S_*(X)}{S_*(x_0)} = S_*(X, x_0)$

equivalentemente:

$$0 \longrightarrow \tilde{S}_*(x_0) \longrightarrow \tilde{S}_*(X) \longrightarrow S_*(X, x_0) \longrightarrow 0$$

La s.e.l en homología asociada es

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, x_0) \longrightarrow \cancelto{0}{\tilde{H}_n(x_0)} \longrightarrow \tilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X, x_0) \longrightarrow \cancelto{0}{\tilde{H}_{n-1}(x_0)} \longrightarrow \cdots$$

De aquí que $\tilde{H}_n(X) \cong H_n(X, x_0)$, $\forall n \geq 0$. ■

Teorema de Escisión*

Sean X espacio topológico y $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}_{i \in I}$ cubierta abierta para X.

Definamos $S_q^{\mathcal{U}}(X) := \{\sigma \in S_q(X) \mid \operatorname{im}(\sigma) \subseteq \mathcal{U}_i, \text{ p.a. } i\}$

y observemos que para $\sigma \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$, $\partial_q(\sigma) \in S_q^{\mathcal{U}}(X)$, por lo que se tiene un complejo de cadenas

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = \{S_q^{\mathcal{U}}(X), \partial_q\}_{q \geq 0}$$

---

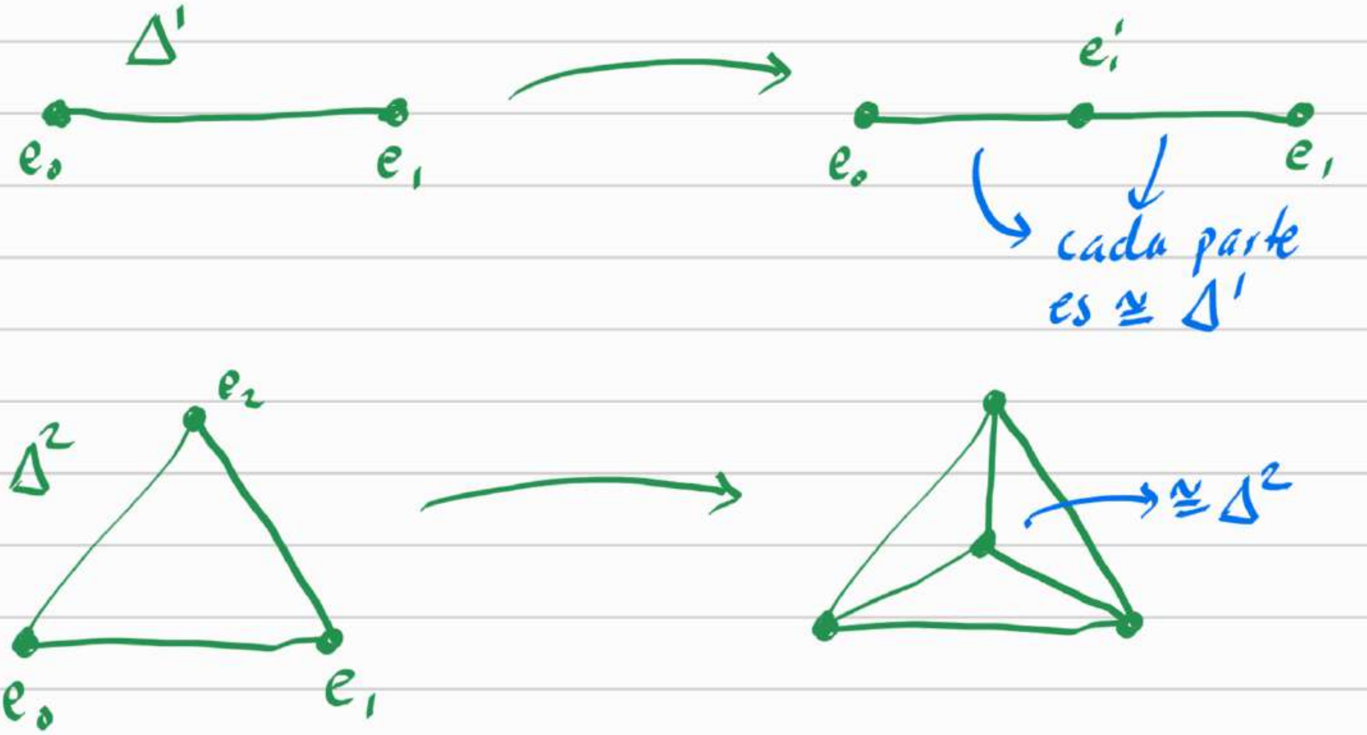
* división de algo en partes de valor semejante al todo

Llamamos a $S_*^{\mathcal{U}}(X)$ el complejo de cadenas singulares **$\mathcal{U}$-pequeñas**. Desde el punto de vista homológico no se pierde información con esta versión más pequeña del complejo de cadenas singulares.

Prop. 2.21 en [Hatcher]

Teorema La inclusión $S_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow S_*(X)$ es un complejo de cadenas y define un isomorfismo en homología.

El resultado anterior se prueba a través de un proceso de subdivisión baricéntrica de un simplejo para tener más control sobre las cadenas singulares, en particular se definen subdivisones como las que se indican:



En términos algebraicos se definen homomorfismos

$$B_q : S_q(X) \longrightarrow S_q(X)$$

que definen un morfismo de complejos $B: S_*(X) \longrightarrow S_*(X)$ que produce diagramas conmutativos de la forma

$$\begin{tikzcd} S_*(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "B"] & S_*(Y) \arrow[d, "B"] \\ S_*(X) \arrow[r] & S_*(Y) \end{tikzcd}$$

Una propiedad importante del operador B es que $B \simeq id$; véase [Hatcher], [Munkres] ó [Spanier] para más detalles.

Para la cubierta abierta $\mathcal{U}$ de arriba definimos

$$\tilde{S}_*^{\mathcal{U}}(X) := \tilde{S}_*(X) \cap S_*^{\mathcal{U}}(X)$$

y la llamamos el complejo de cadenas $\mathcal{U}$-pequeñas reducidas.

También se tiene una versión relativa: dados $A \subseteq X$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cubierta abierta para X notamos que $\mathcal{U}_A := \{U_i \cap A\}_{i \in I}$ es cubierta para A. Con esto definimos

$$S_*^{\mathcal{U}}(X, A) := S_*^{\mathcal{U}}(X) / S_*^{\mathcal{U}_A}(A)$$

y lo llamamos el complejo de cadenas $\mathcal{U}$-pequeñas relativas al par (X, A).

Teorema La inclusión $i: S_*^{\mathcal{U}}(X,A) \longrightarrow S_*(X,A)$ induce isomorfismos a nivel de homología.

Dem Basta considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_*^{\mathcal{U}_A}(A) \arrow[r] \arrow[d] & S_*^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d] & S_*^{\mathcal{U}}(X,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_*(A) \arrow[r] & S_*(X) \arrow[r] & S_*(X,A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y usar el lema del 5to. ∎

Sea $\mathcal{U} = \{U, V\}$ cubierta abierta para X, y consideremos las siguientes inclusiones ⟶

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dr, "j_U"] & \\
U \cap V \arrow[ur, "i_U"] \arrow[dr, "i_V"'] & & X \\
 & V \arrow[ur, "j_V"'] &
\end{tikzcd}$$

y las correspondientes sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \to S_*(U\cap V) \xrightarrow{S_*(i_U) - S_*(i_V)} S_*(U) \oplus S_*(V) \xrightarrow{S_*(j_U) + S_*(j_V)} S_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0$$

$$c \longmapsto (S_*(i_U)(x) - S_*(i_V)(x)) = (c, -c)$$

(1)

$$(c, d) \longmapsto S_*(j_U) + S_*(j_V) = c + d$$

y la correspondiente en cadenas reducidas:

$$0 \to \tilde{S}_*(U\cap V) \xrightarrow{\tilde{S}_*(i_U)-\tilde{S}_*(i_V)} \tilde{S}_*(U)\oplus \tilde{S}_*(V) \xrightarrow{\tilde{S}_*(j_U)+\tilde{S}_*(j_V)} \tilde{S}^{\mathcal{U}}_*(X) \to 0$$

(2)

Teorema (de Mayer-Vietoris) Para $\mathcal{U}=\{U,V\}$ cobierta abierta de X se tiene una s.e.l. de la forma

$$\cdots \to H_{q+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_q(U\cap V) \xrightarrow{\alpha} H_q(U)\oplus H_q(V) \xrightarrow{\beta} H_q(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $\alpha([c]) = \left(H_q(i_U)([c]), -H_q(i_V)([c])\right)$

$$\beta([c],[d]) = H_q(j_U)([c]) + H_q(j_V)([d]).$$

Para $[z]\in H_{q+1}(X)$ hacemos $B^r(z)=x+y$ con $x\in S_q(U)$, $y\in S_q(V)$; aquí x,y no necesariamente son ciclos pero $\partial x=-\partial y$ pues $\partial(x+y)=0$.
Se define $\Delta([z])=[\partial x]$.

Dem Basta tomar la s.e.l. en homología para (1)

De igual forma, usando la s.e.c. (2) se tiene una sucesión en homología reducida:

$$\cdots \to \tilde{H}_{q+1}(X) \to \tilde{H}_q(U\cap V) \to \tilde{H}_q(U)\oplus \tilde{H}_q(V) \to \tilde{H}_q(X) \longrightarrow \cdots$$

Relación con Seifert-van Kampen

Tomamos la suceción de M-V en homología reducida

$$0 \longrightarrow \tilde{H}_1(U\cap V) \xrightarrow{\alpha} \tilde{H}_1(U) \oplus \tilde{H}_1(V) \xrightarrow{\beta} \tilde{H}_1(X) \longrightarrow 0$$

y notamos que

$$\tilde{H}_1(X) \cong \frac{\tilde{H}_1(U) \oplus \tilde{H}_1(V)}{\ker \beta} \cong \frac{\tilde{H}_1(U) \oplus \tilde{H}_1(V)}{\operatorname{im} \alpha}$$

que es la versión abelianizada de S-vK. ◀

Recordemos que un espacio (X, x_0) es bien punteado si $\exists V$ vecindad de x_0 y homotopía $H: V\times I \to V$ con

$$H(x,0)=x, \quad H(x,1)=x_0, \quad H(x_0,t)=x_0 \quad \forall t\in I, \forall x\in V$$

Teorema Si (X,x_0), (Y,y_0) son espacios bien punteados entonces $\tilde{H}_q(X\vee Y) \cong \tilde{H}_q(X) \oplus \tilde{H}_q(Y)$, $\forall q\geq 0$

Dem Basta considerar la cubierta $\mathcal{U} = \{X\vee V_{y_0}, U_{x_0}\vee Y\}$, donde U_{x_0}, V_{y_0} son las vecindades de la dfn. de arriba, y aplicar M-V. ▨

Teorema (de escisión)* Sean $U \subseteq A \subseteq X$ tales que $\overline{U} \subseteq A^\circ$. Entonces la inclusión $(X \setminus U, A \setminus U) \longrightarrow (X, A)$ induce isomorfismos en homología

$$H_q(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_q(X, A), \quad \forall q \geq 0$$

Dem (idea) Tomemos la cubierta abierta para X dada por $\mathcal{U} = \{A^\circ, X \setminus \overline{U}\}$ y notemos que induce una cubierta para A:

$$\mathcal{U}_A = \{A^\circ \cap A, (X \setminus \overline{U}) \cap A\} = \{A^\circ, A \setminus \overline{U}\}$$

Recordemos que las inclusiones $S_*^{\mathcal{U}_A}(A) \xrightarrow{\alpha} S_*(A)$, $S_*^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\beta} S_*(X)$ inducen isomorfismos en homología y producen un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & S_*^{\mathcal{U}_A}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & S_*^{\mathcal{U}}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & S_*^{\mathcal{U}}(X)/S_*^{\mathcal{U}_A}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & S_*(A) \arrow[r] & S_*(X) \arrow[r] & S_*(X)/S_*(A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde γ se define en términos de α, β y también induce isomorfismos en homología (por Lema del 5to).

Por otro lado, usando las cubiertas abiertas de arriba, tenemos

---

(*) escisión: dividir algo en partes de valor o importancia semejante

$$S_*^{\mathcal{U}}(X) = S_*(A^\circ) + S_*(X \setminus \bar{U})$$

$$S_*^{\mathcal{U}_A}(A) = S_*(A^\circ) + S_*(A \setminus \bar{U})$$

$\boxed{\text{no es suma directa pues no sabemos si son disjuntos}}$

De esto tenemos $\dfrac{S_*^{\mathcal{U}}(X)}{S_*^{\mathcal{U}_A}(A)} \cong \dfrac{S_*(X \setminus \bar{U})}{S_*(A \setminus \bar{U})}$ —— $(*)$

Ahora tomamos la cubierta abierta

$$\mathcal{U} = \{ (A \setminus U)^\circ, X \setminus \bar{U} \}$$

para $X \setminus U$ y la respectiva subcubierta para $A \setminus U$:

$$\mathcal{U}_{A \setminus U} = \{ (A \setminus U)^\circ, A \setminus \bar{U} \}$$

De aquí $S_*^{\mathcal{U}}(X \setminus U) = S_*((A \setminus U)^\circ) + S_*(X \setminus \bar{U})$

$$S_*^{\mathcal{U}_{A \setminus U}}(A \setminus U) = S_*((A \setminus U)^\circ) + S_*(A \setminus \bar{U})$$

por lo que $\dfrac{S_*^{\mathcal{U}}(X \setminus U)}{S_*^{\mathcal{U}_{A \setminus U}}(A \setminus U)} \cong \dfrac{S_*(X \setminus \bar{U})}{S_*(A \setminus \bar{U})}$.

Por $(*)$ tenemos: $\dfrac{S_*^{\mathcal{U}}(X \setminus U)}{S_*^{\mathcal{U}_{A \setminus U}}(A \setminus U)} \cong \dfrac{S_*^{\mathcal{U}}(X)}{S_*^{\mathcal{U}_A}(A)}$

que produce los isomorfismos

$$H_*(X,A) \cong H_*(X\setminus\bar{U}, A\setminus\bar{U}) \cong H_*(X\setminus U, A\setminus U)$$

como se quería. ∎

Corolario Sean X espacio topológico y $A,B \subseteq X$ con $X = A^\circ \cup B^\circ$. Entonces la inclusión $(B, A\cap B) \longrightarrow (X,A)$ induce isomorfismos en homología:

$$H_q(B, A\cap B) \cong H_q(X,A), \ \forall q \geq 0.$$

Dem Hagamos $U = X\setminus B$ y notemos que:

$$X\setminus B \subseteq X\setminus B^\circ, \qquad \bar{U} = \overline{X\setminus B} \subseteq \overline{X\setminus B^\circ} = X\setminus B^\circ \subseteq A^\circ$$

Por el resultado anterior tenemos $H_q(X,A) \cong H_q(X\setminus U, A\setminus U)$, $\forall q \geq 0$

Sin embargo: $X\setminus U = X\setminus(X\setminus B) = B$
$A\setminus U = A\setminus(X\setminus B) = A\cap B$

$$\Rightarrow \quad H_q(X,A) \cong H_q(B, A\cap B), \ \forall q \geq 0. \ ∎$$

Un teorema de escisión celular

Sean X espacio celular & $A \subseteq X$ subespacio (celular)*. Recordemos que X/A es el espacio cociente que identifica a A con un punto, denotado por $\{A\}$.

Teorema La proyección cociente $p : (X,A) \longrightarrow (X/A, \{A\})$ induce el isomorfismo

$$H_q(p) : H_q(X,A) \longrightarrow H_q(X/A, \{A\}), \ \forall q \geq 0$$

En particular $H_q(X,A) \cong \tilde{H}_q(X/A), \forall q \geq 0.$

Dem (idea) Tomemos una vecindad $\mathcal{U}$ de A tal que A es retracto por deformación de $\mathcal{U}$. Por el Lema del 5to

$$H_q(X,A) \cong H_q(X,\mathcal{U})$$

Haciendo $V := p(\mathcal{U})$ notamos que $\{A\} \overset{\simeq}{\hookrightarrow} V$; por un argumento como el de arriba

$$H_q(X/A, \{A\}) \cong H_q(X/A, V)$$

(*) Esto significa que X se obtiene de A a partir del pegado de un número finito de celdas

Por escisión tenemos los isomorfismos

$$H_q(X,\mathcal{U}) \cong H_q(X\setminus A, \mathcal{U}\setminus A)$$

&

$$H_q(X/A, V) \cong H_q(X/A\setminus\{A\}, V\setminus\{A\})$$

Finalmente, los isomorfismos satisfacen el diagrama

$$\begin{tikzcd}
H_q(X,A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "H_q(p)"', "\cong"] & H_q(X,\mathcal{U}) \arrow[d, "H_q(p)"'] & H_q(X\setminus A, \mathcal{U}\setminus A) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\cong"] \\
H_q(X/A, \{A\}) \arrow[r, "\cong"] & H_q(X/A, V) & H_q(X/A\setminus\{A\}, V\setminus\{A\}) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

donde el isomorfismo $\cong$ se obtiene por la s.e.l. en homología relativa & $H_q(p)$ se obtiene por restricción. Por lo tanto $H_q(p)$ es isomorfismo con

$$\tilde{H}_q(X/A) \cong H_q(X/A, \{A\}). \blacksquare$$