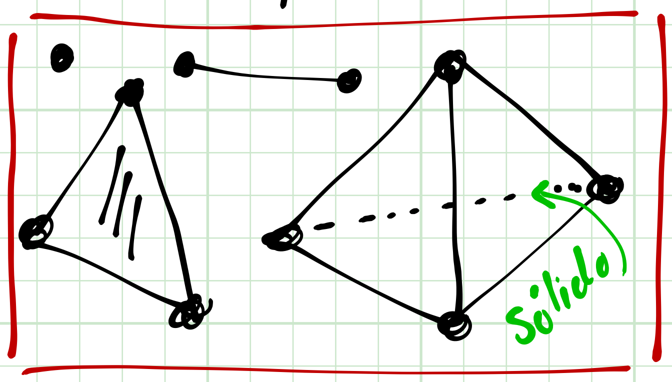

Notas sobre homología simplicial
Miguel A.
Maldonado
Zacatecas, 2024

Homología simplicial

Decimos que $x_0, x_1, \dots x_q \in \mathbb{R}^n$ son geométricamente independientes si $\{x_i - x_0\}_{i=1}^{q}$ es un conjunto de vectores l.i.

Un q-simplejo σ_q es la envoltura convexa de un conjunto $\{x_0, \dots, x_q\}$ de vectores geo. ind. Notación: $\sigma_q = \langle x_0, x_1, \dots, x_q \rangle$



Lema La envolvente convexa $\{x_0, \dots, x_q\}$ está dada por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x = \sum_{i=0}^{q} t_i x_i,\ t_i \geq 0,\ \sum t_i = 1 \right\}$$

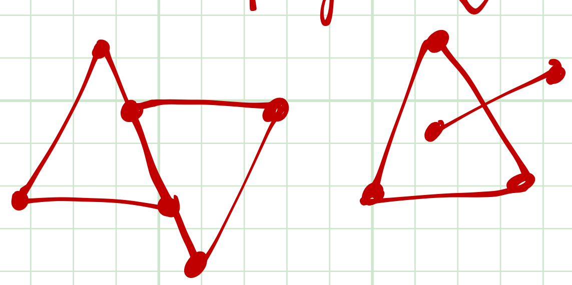
Un complejo simplicial K es un conjunto finito de simplejos en $\mathbb{R}^n$ tales que:

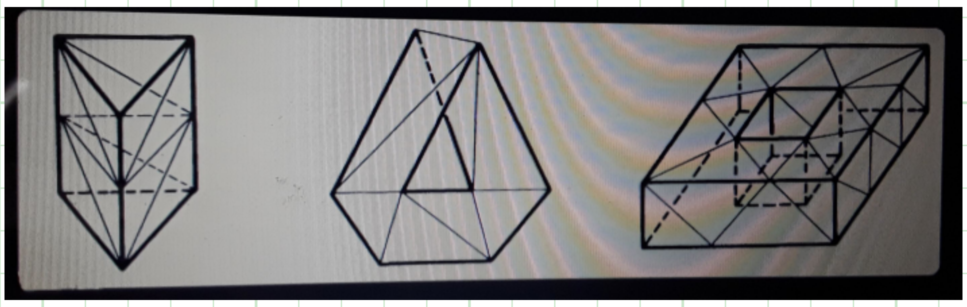
(i) Para $\sigma \in K$ & $\tau \leq \sigma$, entonces $\tau \in K$

(ii) Para $\sigma, \tau \in K$, $\sigma \cap \tau = \phi$ ó $\sigma \cap \tau$ es cara común (y por tanto $\sigma \cap \tau \in K$)

Ejemplos:

no complejos:



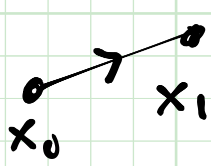


triangulaciones (de superficies)

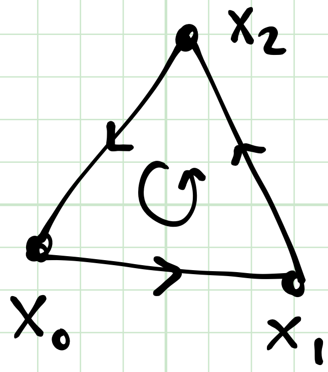
La dimensión de K es la dimensión más gde. de todos los simplejos $\sigma \in K$.

Un simplejo es llamado ordenado si se ha elegido algún orden en sus vértices (0-simplejos)

$\langle x_0 \rangle$



$\langle x_0, x_1 \rangle = -\langle x_1, x_0 \rangle$



$$
\begin{aligned}
\langle x_0, x_1, x_2 \rangle &= \langle x_1, x_2, x_0 \rangle \\
&= \langle x_2, x_0, x_1 \rangle \\
&= -\langle x_1, x_0, x_2 \rangle \\
&= -\langle x_0, x_2, x_1 \rangle \\
&= -\langle x_2, x_1, x_0 \rangle
\end{aligned}
$$

En general, para $\sigma = \langle x_0, x_1, \ldots x_q \rangle$ se tiene dos orientaciones

orietación positiva (permutaciones pares)   orientación negativa (permutación impar)

Más aun, $\langle x_0, \ldots, x_q \rangle = (-1)^{|\sigma|} \langle x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(q)} \rangle$, donde $|\sigma| \in \{1, -1\}$ es el signo de la permutación σ.

Para K complejo simplicial finito definimos:

$$C_q(K) = C_q(K; \mathbb{Z}) = \text{gpo. abeliano c/ base } q\text{-simplejos orientados de } K$$

Obs Si α_q es el número de q-simplejos $C_q(K) \cong \mathbb{Z}^{\alpha_q}$; además todo elemento de $C_q(K)$ tiene la forma

$$c = n_1 \sigma_q^1 + n_2 \sigma_q^2 + \cdots + n_{\alpha_q} \sigma_q^{\alpha_q}, \quad n_i \in \mathbb{Z}$$

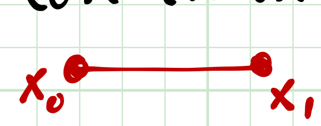
donde hemos elegido una orientación $\sigma_q^1, \sigma_q^2, \ldots, \sigma_q^{\alpha_q}$. El elemento c es llamado una q-cadena simplicial.

Para un q-simplejo orientado $\sigma_q = \langle x_0, x_1, \ldots, x_q \rangle$ definimos

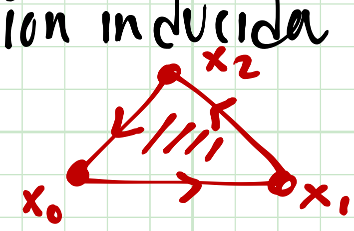
operador frontera

$$\partial \sigma_q = \partial \langle x_0, \ldots, x_q \rangle = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q \rangle,$$

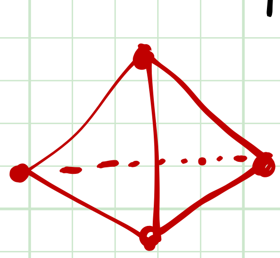
donde $(-1)^i \langle x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q \rangle$ es la cara opuesta al vértice x_i con la orientación inducida



$\partial \langle x_0, x_1 \rangle = \langle x_1 \rangle - \langle x_0 \rangle$



$\partial \langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_0, x_2 \rangle + \langle x_0, x_1 \rangle$



$$
\begin{aligned}
\partial \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle &= \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \\
&- \langle x_0, x_2, x_3 \rangle \\
&+ \langle x_0, x_1, x_3 \rangle \\
&- \langle x_0, x_1, x_3 \rangle
\end{aligned}
$$

En la definición anterior si $q=0$ hacemos $\partial\langle x_0\rangle = 0$; además $C_{-1}(K)=0$. Con esto obtenemos una sucesión de gpos & homomorfismos: (extendiendo por linealidad)

$$\cdots \longrightarrow C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} \cdots\cdots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0 = 0} 0$$

Estamos interesados en los núcleos e imágenes de los homorfismos involucrados:

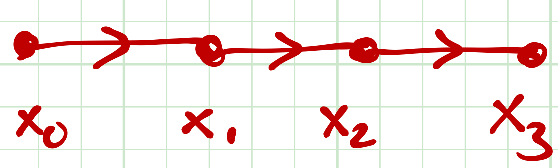
$$Z_q(K) := \mathrm{Ker}(\partial_q) \qquad q\text{-ciclos de } K$$

$$B_q(K) := \mathrm{im}(\partial_{q+1}) \qquad q\text{-fronteras de } K$$

Obs $\quad Z_q(K) \subseteq C_q(K) \supseteq B_q(K)$, $\forall q$

Ejemplos a) Por definición $Z_0(K) = \mathrm{Ker}(\partial_0) = C_0(K)$

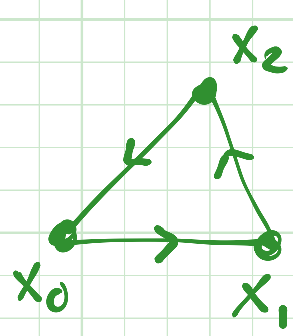
b) $c = \langle x_0, x_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_3\rangle \in C_1(K)$



$$\partial_1(c) = \partial_1(\langle x_0,x_1\rangle) + \partial_1(\langle x_1,x_2\rangle) + \partial_1(\langle x_2,x_3\rangle)$$

$$= \cancel{\langle x_1\rangle} - \langle x_0\rangle + \cancel{\langle x_2\rangle} - \cancel{\langle x_1\rangle} + \langle x_3\rangle - \cancel{\langle x_2\rangle}$$

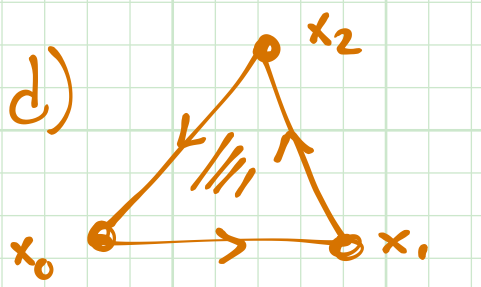
$$= \langle x_3\rangle - \langle x_0\rangle$$ "frontera topológica"

c) 

$c = \langle x_0, x_1\rangle + \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_0\rangle \in C_1(K)$

$$\partial_1(c) = \cancel{\langle x_1\rangle} - \cancel{\langle x_0\rangle} + \cancel{\langle x_2\rangle} - \cancel{\langle x_1\rangle} + \cancel{\langle x_0\rangle} - \cancel{\langle x_2\rangle}$$

$$\Rightarrow c \in Z_1(\partial_1)$$

d) 

$c = \langle x_0, x_1, x_2\rangle$

Notemos que

$$\partial_2(\langle x_0,x_1,x_2\rangle) = \langle x_1,x_2\rangle - \langle x_0,x_2\rangle + \langle x_0,x_1\rangle$$

y además

$$(\partial_1 \circ \partial_2)(c) = \partial_1(\langle x_1,x_2\rangle) - \partial_1(\langle x_0,x_2\rangle) + \partial_1(\langle x_0,x_1\rangle)$$

$$= \langle x_2\rangle - \langle x_1\rangle - \langle x_2\rangle + \langle x_0\rangle + \langle x_1\rangle - \langle x_0\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \partial_2(c) \in Z_1(K) \quad \blacksquare$$

Lema La composición $C_{q+1}(K) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(K) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(K)$ es el homomorfismo trivial.

Dem $(\partial_q \circ \partial_{q+1})(\langle x_0, \dots, x_{q+1}\rangle)$

$$= \partial_q\left[\sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{q+1}\rangle\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\, \partial_q(\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{q+1}\rangle)$$

$$= \sum_{i=0}^{q+1}(-1)^i\left[\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\langle x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{q+1}\rangle + \sum_{j=i+1}^{q+1}(-1)^{j-1}\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{q+1}\rangle\right]$$

$$= \sum_{j<i}(-1)^{i+j}\langle x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{q+1}\rangle + \sum_{j>i}(-1)^{i+j-1}\langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{q+1}\rangle$$

Las sumatorias se anulan pues aparecen los mismos términos pero con signos contrarios. ∎

De este resultado se un complejo de cadenas para K, llamado el complejo de cadenas simpliciales de K. Notemos que en cada dimensión q tenemos una inclusión $\operatorname{im}(\partial_{q+1}) \subseteq \operatorname{Ker}(\partial_q)$

$$\operatorname{im}(\partial_{q+1}) = B_q(K) \quad \text{q-fronteras}, \qquad \operatorname{Ker}(\partial_q) = Z_q(K) \quad \text{q-ciclos}$$

$$H_q(K) := \frac{Z_q(K)}{B_q(K)}$$

q-ésimo gpo. de homología de K

En términos generales $H_q(K)$ detecta aquellos q-ciclos que no son q-fronteras; es decir, que no son la frontera de una $(q+1)$-cadena.

Nota: En la descomposición $H_q(K) = \mathbb{Z}^{p_q} \oplus \underbrace{\left[\bigoplus \mathbb{Z}/t_q^i\right]}$ llamados a $\mathbb{Z}^{p_q}$ su parte libre y a su parte de torsión

El q-ésimo número de Betti de K se define como el rango de $H_q(K)$:

$$\beta_q(K) = \text{rango}(H_q(K)) = P_q.$$

Para el complejo de cadenas simpliciales de K definimos el <u>homomorfismo de aumentación</u>

$$\varepsilon : C_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\sum n_i \sigma_0^i \longmapsto \sum n_i$$

Notemos que ε es epimorfismo. Además $\operatorname{Ker}(\varepsilon) = B_0(K)$:

i) Observemos que si $\sigma_1 = \langle a_0, a_1\rangle \in C_1(K)$, entonces

$$\begin{aligned}(\varepsilon \circ \partial_1)(\sigma_1) &= \varepsilon(\partial_1(\langle a_0, a_1\rangle)) \\ &= \varepsilon(\langle a_1\rangle - \langle a_0\rangle) \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad B_0(K) = \operatorname{im}(\partial_1) \subseteq \operatorname{Ker}(\varepsilon).$$

ii) Tomemos $c = \sum_{i=0}^{l} n_i a_i$ tal que $\varepsilon(c) = 0 \equiv \sum n_i = 0$

De aquí $n_0 = -(n_1 + n_2 + \dots + n_l)$ y por tanto:

$$\begin{aligned} c &= -(n_1 + n_2 + \dots + n_l)a_0 + n_1 a_1 + \dots + n_l a_l \\ &= n_1(a_1 - a_0) + n_2(a_2 - a_0) + \dots + n_l(a_l - a_0)\end{aligned}$$

donde $a_i - a_0 = \partial_1(\langle a_0, a_i\rangle)$, $\forall i = 1, 2, \dots, l$. Así, $c \in B_0(K)$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}(\varepsilon) \subseteq B_0(K)$$

<u>Pregunta importante</u>: ¿qué está midiendo $H_q(K)$?

Notemos que si $K = \bigcup_{i \in I} K_i$ (componentes conexas), entonces

$C_q(K) \cong \bigoplus_{i\in I} C_q(K_i)$ (los diferenciales son compatibles) y por ende

$$H_q(K) \cong \bigoplus_{i \in I} H_q(K_i)$$

Así, la homología detecta las componentes conexas de K.
las cadenas

Teorema Si K es (arco-) conexo, entonces $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$

Dem Recordemos que $\varepsilon: C_0(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es epi & $\mathrm{Ker}(\varepsilon) = B_0(K)$

$$\Rightarrow \quad \frac{C_0(K)}{B_0(K)} \cong \mathbb{Z}$$

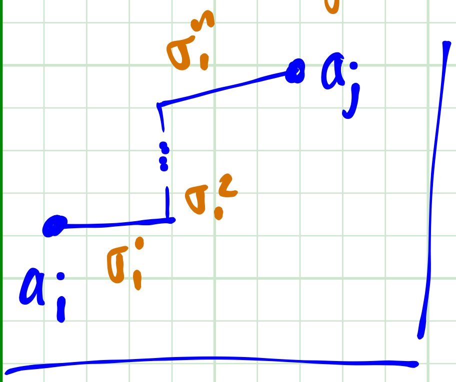
$$\cdots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$H_0(K) = \frac{\mathrm{Ker}(\partial_0)}{\mathrm{im}(\partial_1)}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \cong \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad H_0(K) \cong \mathbb{Z}$$

Equivalentemente, para vértices a_i, a_j de K tomamos una colección de 1-simplejos entre ellos $\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^n$ y notemos que



$$\partial_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^i\right) = a_j - a_i$$

$$\Rightarrow \text{ en el cociente } H_0(K),\ [a_j - a_i] = 0$$

$$\Rightarrow \quad [a_j] = [a_i]$$

Es decir, existe una única clase en $H_0(K)$:

$$\left[\sum n_i a_i\right] = \sum n_i [a_i] = \left(\sum n_i\right)[a_i]$$

$$\Rightarrow \quad H_0(K) \cong \{\, n[a_i] \mid n \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z} \quad \blacksquare$$

Teorema Para K complejo simplicial $H_0(K)$ es abeliano libre de rango = # componentes conexas de K.

Proposición. Si Δ^n es el n-simplejo estandar, entonces

$$H_q(\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases}$$

Dem Notemos que el caso $i=0$ se sigue del resultado previo.

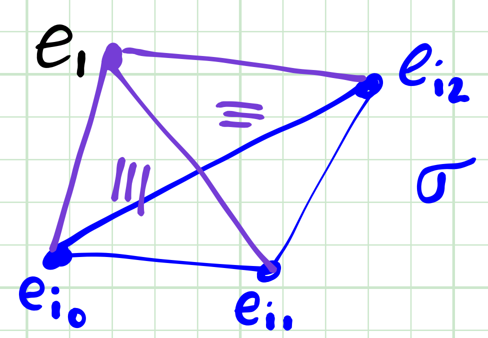
P.D. todo i-ciclo es una i-frontera, $\forall i \geq 1$

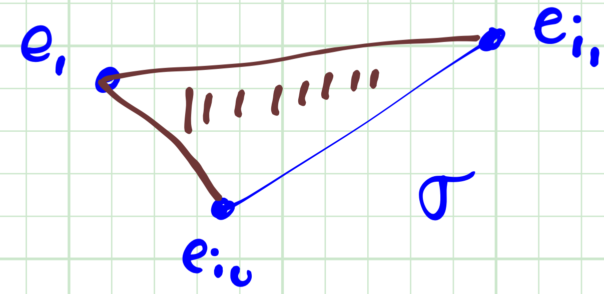
Tomemos

$$\sigma = \langle e_{i_0}, \dots, e_{i_q} \rangle$$

q-simplejo de Δ^n que no contenga al vértice e_1. Denotemos por $e_1\sigma$ al $(q+1)$-simplejo

$$\langle e_1, e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_q} \rangle$$





y notemos que $\partial_{q+1}(e,\sigma) = \sigma - e_1\partial_q(\sigma)$, $q \geq 2$

$\partial_1(e_1 \langle e_{ij} \rangle) = \langle e_{ij} \rangle - \langle e_1 \rangle$, $q = 1$

Tomemos una cadena simplicial $\sigma \in C_q(K)$ y notemos que: siempre podemos escribir ($q \geq 1$)

$$\sigma = e_1\sigma_1 + \sigma_2 \qquad \begin{cases} \text{si } e_1 \in \sigma, & \sigma_1 = \sigma \setminus \langle e_1 \rangle, \sigma_2 = \phi \\ \text{si } e_1 \notin \sigma, & \sigma_1 = \phi, \ \sigma_2 = \sigma \end{cases}$$

donde σ_1, σ_2 son cadenas que no contienen a e_1.

Si suponemos que $\sigma \in Z_q(K)$, entonces $\partial_q(\sigma) = 0$; es decir

$$\partial_q(\sigma) = \partial_q(e_1\sigma_1 + \sigma_2) = \partial_q(e_1\sigma_1) + \partial_q(\sigma_2)$$
$$= \sigma_1 - e_1\partial_{q-1}(\sigma_1) + \partial_q(\sigma_2) = 0$$

$\Rightarrow \sigma_1 + \partial_q(\sigma_2) = 0$ & $e_1\partial_{q-1}(\sigma_1) = 0$ → es el único término que tiene al vértice e_1

$\Rightarrow \partial_q(\sigma_2) = -\sigma_1$

De esto obtenemos que
$$\partial_{q+1}(e_1\sigma_2) = \sigma_2 - e_1\partial_q(\sigma_2)$$
$$= \sigma_2 - e_1(-\sigma_1)$$
$$= \sigma_2 + e_1\sigma_1 = \sigma$$

Por lo que $\sigma \in B_q(Z)$ y por tanto $[\sigma] = 0$ en $H_q(K)$.

$\therefore H_q(K) = 0, \ \forall q \geq 1$ ∎

septiembre 19

Tomemos $\partial\Delta^n$ el $(n-1)$-simplejo de Δ^n dado por todas las caras de dimensión $< n$.

Proposición Si $n \geq 2$, $H_q(\partial\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = 0, n-1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$

Dem Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_q(\partial\Delta^n) \longrightarrow C_q(\Delta^n) \longrightarrow A_q \longrightarrow 0$$

donde $A_q := \dfrac{C_q(\Delta^n)}{C_q(\partial\Delta^n)}$. Notemos que $A_q = 0$, si $q \neq n$ y que $A_n = \mathbb{Z}$.

De esto se sigue que complejo A_*

$$A_*: \ 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} A_n = \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_n} 0 \longrightarrow \cdots 0 \longrightarrow 0$$

es tal que $H_q(A_*) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=n \\ 0, & q \neq n \end{cases}$. Por otro lado $H_q(\Delta^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=0 \\ 0, & q \geq 1 \end{cases}$

así que la sucesión exacta larga en homología tiene la forma:

$$\cdots \longrightarrow \cancelto{0}{H_{n+1}(A_*)} \longrightarrow H_n(\partial\Delta^n) \longrightarrow \cancelto{0}{H_n(\Delta^n)} \longrightarrow \cancelto{\mathbb{Z}}{H_n(A_*)} \longrightarrow H_{n-1}(\partial\Delta^n) \longrightarrow \cdots$$

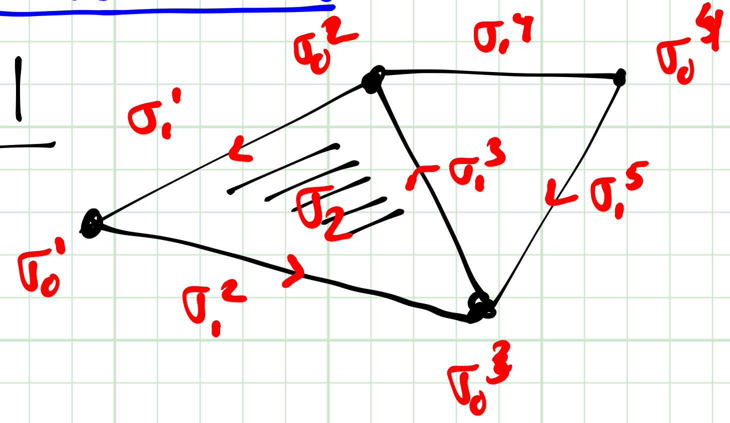
$$\Rightarrow \quad H_q(\partial\Delta^n) = 0, \ \forall q \neq n-1, \quad H_{n-1}(\partial\Delta^n) \cong \mathbb{Z} \quad ■$$

Consecuencia: dado que $\partial\Delta^n \cong S^{n-1}$ se sigue que

$$H_q(S^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q=0, n-1 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

§ Otros cálculos

#1



Aquí $C_0(K) \cong \mathbb{Z}^4$ con elementos

$a_1\sigma_0^1 + \cdots + a_4\sigma_0^4$, $a_i \in \mathbb{Z}$

$C_1(K) \cong \mathbb{Z}^5$ con elementos

$b_1\sigma_1^1 + \cdots + b_5\sigma_1^5$, $b_i \in \mathbb{Z}$

$C_2(K) \cong \mathbb{Z}$ con elemento

$c_1\sigma_2$, $c_1 \in \mathbb{Z}$

$C_q(K) = 0, \ \forall q \geq 3$

De aquí tenemos

$$0 \longrightarrow C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \longrightarrow 0$$

y por tanto $H_2(K) = \dfrac{Z_2(K)}{B_2(K)} = \dfrac{0}{0} = 0$. Por otro lado:

$$\partial_1\left(\sum b_i\sigma_1^i\right) = \sum b_i\,\partial_1(\sigma_1^i) = b_1(\sigma_0^1 - \sigma_1^1) + \cdots + b_5(\sigma_0^3 - \sigma_0^4)$$

$$= (b_1 - b_2)\sigma_0^1 + (-b_1 + b_3 - b_4)\sigma_0^2$$

$$+ (b_2 - b_3 + b_5)\sigma_0^3 + (b_4 - b_5)\sigma_0^4$$

Así que $\partial_1(\sum b_i\sigma_1^i)=0 \iff b_1=b_2,\ b_4=b_5,\ b_1=b_3-b_4$

Con esto obtenemos

$$Z_1(K)=\{b_1\sigma_1^1+b_1\sigma_1^2+(b_1+b_4)\sigma_1^3+b_4\sigma_1^4+b_4\sigma_1^5\}$$

$$=\{b_1(\sigma_1^1+\sigma_1^2+\sigma_1^3)+b_4(+\sigma_1^3+\sigma_1^4+\sigma_1^5)\}$$

haciendo $z_1=\sigma_1^1+\sigma_1^2+\sigma_1^3$, $z_2=\sigma_1^3+\sigma_1^4+\sigma_1^5$ se obtiene que $\{z_1,z_2\}$ es una base p/ $Z_1(K)$. Además

$$\partial_2(c\sigma_2)=c\,\partial_2(\sigma_2)=c(\sigma_1^2+\sigma_1^3+\sigma_1^1)$$

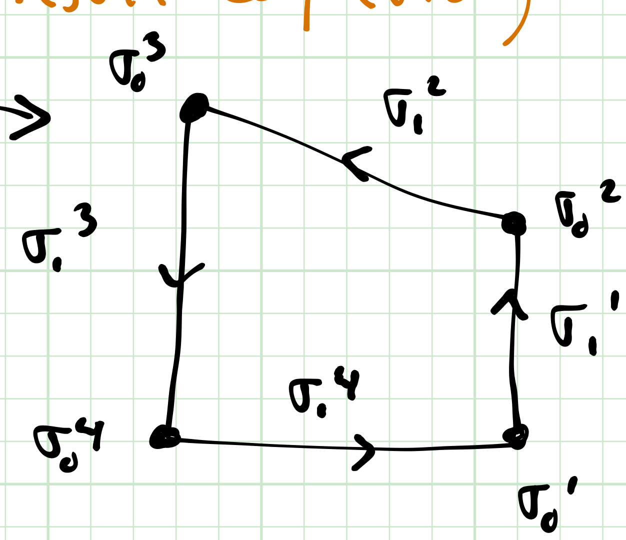
elemento de la base

Finalmente obtenemos,

$$H_1(K)=\frac{Z_1(K)}{B_1(K)}\cong\frac{\mathbb{Z}^2}{\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z} \quad (\text{generador?})$$

$H_0(K)\cong\mathbb{Z}$ (por cálculo directo o usando un resultado previo) ∎

#2 Considere el complejo →



$=K$

$C_0(K)\cong\mathbb{Z}^4$ con elementos:

$a_1\sigma_0^1+a_2\sigma_0^2+a_3\sigma_0^3+a_4\sigma_0^4$

$C_1(K)\cong\mathbb{Z}^4$ con elementos:

$b_1\sigma_1^1+b_2\sigma_1^2+b_3\sigma_1^3+b_4\sigma_1^4$

$C_q(K)=0,\ \forall q\geq 0.$

$$0\to C_1(K)\xrightarrow{\partial_1}C_0(K)\to 0$$

Dado que K es arco-conexo, $H_0(K)=\mathbb{Z}$

resta calcular $H_1(K)$

$$\partial_1(c)=\partial_1\left(\sum_{i=1}^{4}b_i\sigma_1^i\right)$$

$$=b_1(\sigma_0^2-\sigma_0^1)+b_2(\sigma_0^3-\sigma_0^2)+b_3(\sigma_0^4-\sigma_0^3)+b_4(\sigma_0^1-\sigma_0^4)$$

$$=\sigma_0^1(-b_1+b_4)+\sigma_0^2(-b_2+b_1)+\sigma_0^3(b_2-b_3)+\sigma_0^4(b_3-b_4)$$

$$\Rightarrow \partial_1(c)=0\iff b_4=b_1=b_2=b_3$$

De aquí que los elementos de $Z_1(K)$

$$Z_1(K) = \{\, b(\underbrace{\sigma_1^1+\sigma_1^2+\sigma_1^3+\sigma_1^4}_{\text{base}}) \mid b\in\mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$$

Puesto que $C_2(K)=0$, $B_1(K)=\mathrm{im}(\partial_2)=0$; finalmente

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} \cong \mathbb{Z},$$

con generador $\sigma_1^1+\sigma_1^2+\sigma_1^3+\sigma_1^4$. ■

§ Acerca de la homología de superficies

Por definición un complejo simplicial K es una colección de simplejos en $\mathbb{R}^n$ pero puede ser representado geométricamente como sigue: sea $|K|\subseteq\mathbb{R}^n$ la unión de los simplejos de K; dado que cada simplejo de K tiene una topología podemos definir:

$$A\subseteq |K| \text{ cerrado} \Leftrightarrow A\cap\sigma \text{ cerrado en } \sigma,\ \forall\sigma\in K$$

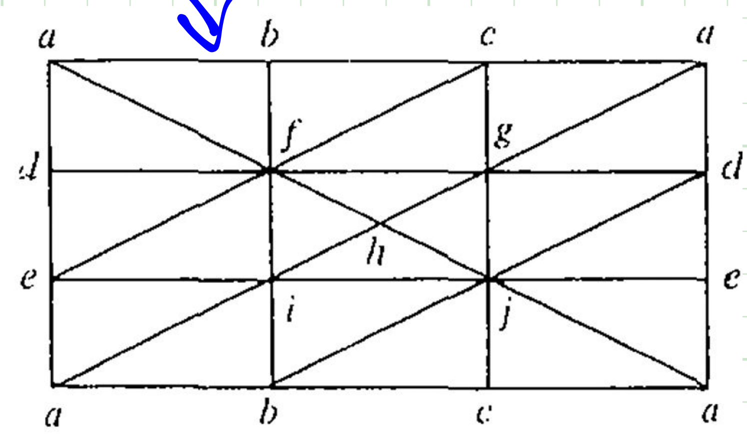
$|K|$ es llamado la realización geométrica (ó el poliedro) de K.

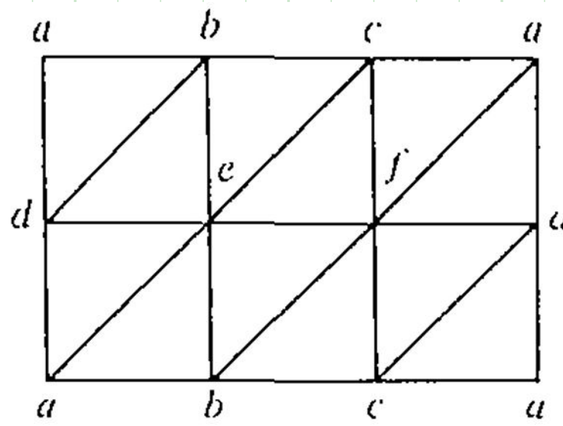
La realización geométrica es importante pues los gpos. de homología de K dependen únicamente de $|K|$ (Munkres, p.31); esto es, para calcular $H_*(K)$ debemos fijarnos en $|K|$.

Realizaciones geométricas de superficies

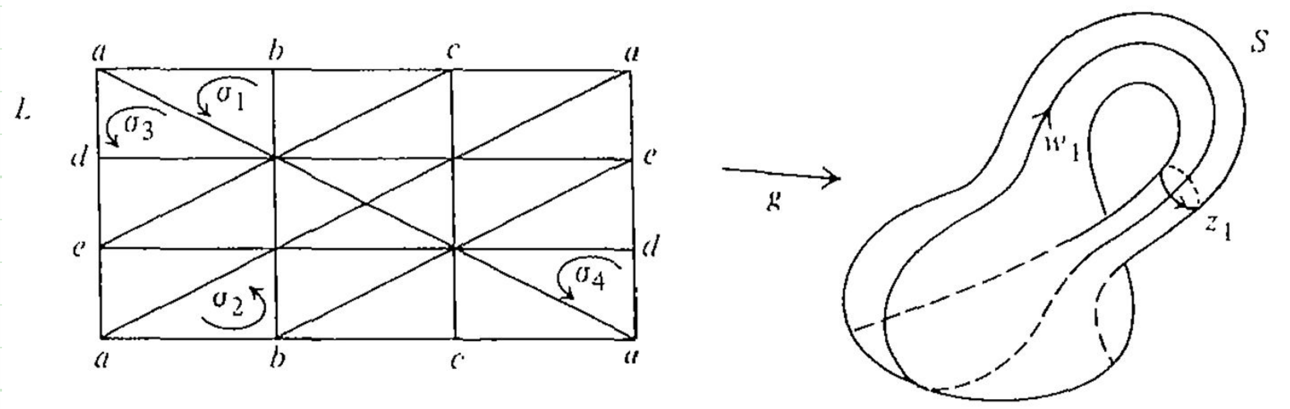
En este caso notamos que una triangulación de una superficie S es precisamente la realización $|S|$. Sin embargo se debe recordar que para una superficie pueden existir distintas triangulaciones ..... y es un teorema profundo que la homología de S no depende de la triangulación elegida!

Ejemplos a) una triangulación del toro T^2.... no toda triangulación da el toro

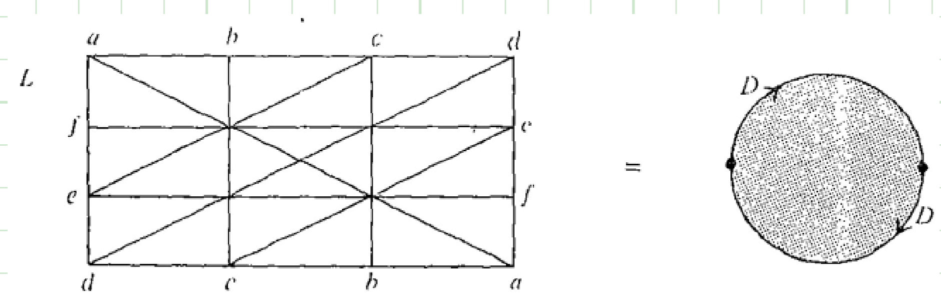




b) una triangulación para la botella de Klein:



c) triangulación de $\mathbb{R}P^2$:



§ Funciones simpliciales & hom. inducidos

Una función $\varphi: K \longrightarrow L$ entre complejos simpliciales es <u>simplicial</u> si se cumple

i) φ manda vértices de K en vértices de L

ii) si $\sigma = \langle x_0, x_1, \ldots, x_q \rangle \in K$, entonces $\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_q)$ son vértices de simplejo $\varphi(\sigma)$ de L.

Propiedades de funciones simpliciales:

a) $\varphi: K \longrightarrow L$ está determinada por las imágenes de los vértices de K.

b) $\sigma \leq \tau$ (en K) $\Rightarrow$ $\varphi(\sigma) \leq \varphi(\tau)$ (en L)

c) Para todo simplejo $\sigma \in K$, $\dim(\sigma) \geq \dim(\varphi(\sigma))$

d) φ induce función continua $|\varphi| : |K| \longrightarrow |L|$

e) $\varphi : K \to L$ es <u>isomorfismo</u> si φ es biyectiva.

Si $\varphi : K \to L$ es simplicial y biyectiva, entonces $\varphi^{-1} : L \to K$ es simplicial.

f) Si φ es isomorfismo, $|\varphi|$ es homeomorfismo. ∎

Para una función simplicial $f : K \to L$ se tiene un homomorfismo inducido a nivel de cadenas simpliciales:

$$C_q(f) : C_q(K) \longrightarrow C_q(L), \quad q \geq 0$$

$$\sigma_q = \langle x_0, \dots, x_q \rangle \longmapsto C_q(f) = \begin{cases} \langle f(x_0), \dots, f(x_q) \rangle & f(x_i) \neq f(x_j), \forall i \neq j \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Nos fijamos en los complejos simpliciales asociados:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "f"] & \cdots \arrow[r] & C_n(K) \arrow[r] \arrow[d, "C_n(f)"'] & C_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d, "C_{n-1}(f)"] & C_{n-2}(K) \arrow[r] \arrow[d, "C_{n-2}(f)"] & \cdots \\
L & \cdots \arrow[r] & C_n(L) \arrow[r] & C_{n-1}(L) \arrow[r] & C_{n-2}(L) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

<u>Afirm</u>: cada cuadrado es conmutativo.

Sol. Basta recordar las definiciones:

$$\begin{tikzcd}
\langle x_0, \dots, x_q \rangle \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "C_q(f)"'] & \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q \rangle \arrow[d, "C_{q-1}(f)"] \\
\langle f(x_0), \dots, f(x_q) \rangle \arrow[r, mapsto] & \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \langle f(x_0), \dots, \widehat{f(x_i)}, \dots, f(x_q) \rangle
\end{tikzcd}$$

∎

Observación:

$$C_q(f)(Z_q(K)) \subseteq Z_q(L)$$

$$C_q(f)(B_q(K)) \subseteq B_q(L) \qquad \forall q \geq 0$$

Más aun, por restricción se tienen homomorfismos

$$\begin{tikzcd} K \arrow[d, "f"'] & B_q(K) \arrow[r, hook] \arrow[d] & Z_q(K) \arrow[r, hook] \arrow[d] & C_q(K) \arrow[d, "C_q(f)"] \\ L & B_q(L) \arrow[r, hook] & Z_q(L) \arrow[r, hook] & C_q(L) \end{tikzcd}$$

De esto se tiene un homomorfismo de homología:

$$H_q(f): H_q(K) \longrightarrow H_q(L)$$

$$[z] \longmapsto [C_q(f)(z)]$$

clase de homología

Propiedades funtoriales

a) $f = 1: K \longrightarrow K$ función identidad

$$C_q(f) : C_q(K) \longrightarrow C_q(K)$$

$$H_q(f) : H_q(K) \longrightarrow H_q(K)$$

son homomorfismos identidad.

b) para funciones simpliciales $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} M$

$$C_q(g \circ f) = C_q(g) \circ C_q(f), \quad H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$$

c) si $f: K \longrightarrow L$ es isomorfismo, entonces $C_q(f)$, $H_q(f)$ son isomorfismos.

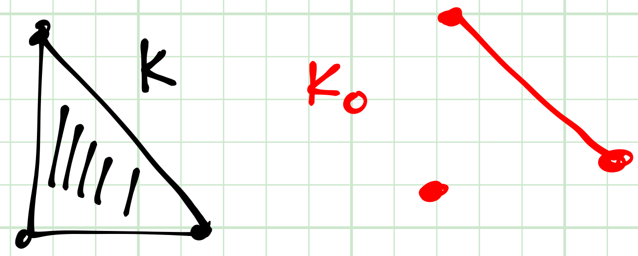
d) si $f: K \longrightarrow L$ es f. simplicial y K, L son conexos, entonces $H_0(f): H_0(K) \longrightarrow H_0(L)$ es isomorfismo.

e) si $f: K \longrightarrow L$ es f. simplicial constante, entonces $H_q(f) = 0$ (homomorfismo trivial), $\forall q > 0$.

Homología relativa

Sea K un complejo simplicial. Decimos que $K_0 \subseteq K$ es **subcomplejo de K** si K_0 es complejo simplicial por sí mismo.

Si tenemos K_0 subcomplejo de K, entonces



$$C_q(K_0) \subseteq C_q(K), \quad \forall\, q \geq 0$$

Llamamos al cociente

$$C_q(K, K_0) = C_q(K) / C_q(K_0)$$

el gpo. de **q-cadenas relativas de K módulo K_0**.

Notación: si $c \in C_q(X)$ su clase lateral en el cociente es

$$\bar{c} := c + C_q(K_0) \in C_q(K, K_0)$$

Además $\bar{c_1} = \bar{c_2} \iff c_1 - c_2 \in C_q(K_0)$.

Dado el operador frontera $\partial_q : C_q(K) \longrightarrow C_{q-1}(K)$ definimos

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_q : C_q(K, K_0) &\longrightarrow C_{q-1}(K, K_0) \qquad q \geq 0 \\ \bar{c} &\longmapsto \overline{\partial_q(c)} \end{aligned}$$

Así, $\bar{\partial}_q$ está inducido por el operador frontera ∂_q en el cociente.

Lema Bajo las condiciones anteriores se tiene un complejo de cadenas de la forma:

$$\cdots\cdots \longrightarrow C_2(K, K_0) \xrightarrow{\bar{\partial}_2} C_1(K, K_0) \xrightarrow{\bar{\partial}_1} C_0(K, K_0) \longrightarrow 0$$

Dem Inmediato: para $c \in C_q(K)$ & $\bar{c} \in C_q(K, K_0)$

$$\bar{\partial}_q\left(\bar{\partial}_{q+1}(\bar{c})\right) = \bar{\partial}_q\left(\overline{\partial_{q+1}(c)}\right) = \overline{(\partial_q \circ \partial_{q+1})(c)}$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

Ciclos y fronteras relativas:

$$Z_q(K,K_0) := \ker(\overline{\partial_q}), \qquad B_q(K,K_0) := \operatorname{im}(\overline{\partial_{q+1}})$$

q-ciclos relativos — q-fronteras relativas

$$H_q(K,K_0) = \frac{Z_q(K,K_0)}{B_q(K,K_0)}$$

q-ésimo gpo. de homología relativa (al par (K,K_0))

Observaciones: (i) una cadena relativa $\overline{c} \in C_q(K,K_0)$ es ciclo relativo (i.e. $\overline{c} \in Z_q(K,K_0)$) sí, y sólo si,

$$\overline{\partial_q}(\overline{c}) = \overline{\partial_q(c)} \in B_{q-1}(K,K_0) \iff \partial_q(c) \in C_{q-1}(K_0)$$

(ii) la cadena relativa $\overline{c} \in C_q(K,K_0)$ es frontera relativa

$$\iff \exists\ \overline{d} \in C_{q+1}(K,K_0) \text{ tal que } \overline{\partial_{q+1}}(\overline{d}) = \overline{\partial_{q+1}(d)} = \overline{c}$$

$$\iff -\partial_{q+1}(d) + c \in C_q(K_0)$$

(iii) Para $z, z' \in Z_q(K,K_0)$ tenemos que

$$[z] = [z'] \iff \overline{z} - \overline{z'} \in B_q(K,K_0)$$

clases de homología relativa

$$\iff \overline{z - z'} = \overline{\partial_{q+1}}(\overline{c}), \quad \overline{c} \in C_{q+1}(K)$$

$$= \overline{\partial_{q+1}(c)}$$

$$\iff z - z' = \partial_{q+1}(c) + c', \quad c' \in C_q(K_0),\ c \in C_{q+1}(K)$$

En estas circunstancias se dice que z, z' son <u>homólogos relativos a K_0</u> (ó <u>módulo K_0</u>).

Ejemplos / cálculos

#1 Si $K_0 = K$, entonces $H_q(K, K_0) = 0$, $\forall q \geq 0$

#2 Si $K_0 = \emptyset$, recuperamos homología "completa": $H_q(K, \emptyset) = H_q(K)$.

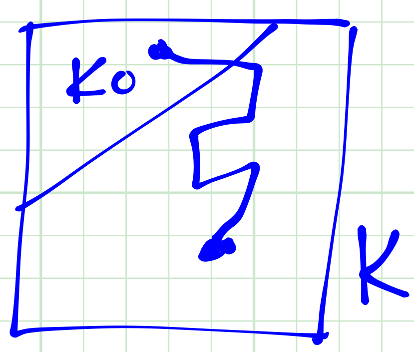
#3 Si $\dim(K_0) < q-1$ entonces $H_i(K, K_0) \cong H_i(K)$, $\forall i \geq q-1$

Dado que $\dim(K_0) < q-1$, $C_j(K_0) = 0$, $\forall j \geq q-1$

$$\Rightarrow \quad C_j(K) \cong C_j(K, K_0), \quad \forall j \geq q-1$$

$$\Rightarrow \quad H_j(K) \cong H_j(K, K_0), \quad \forall j \geq q-1$$

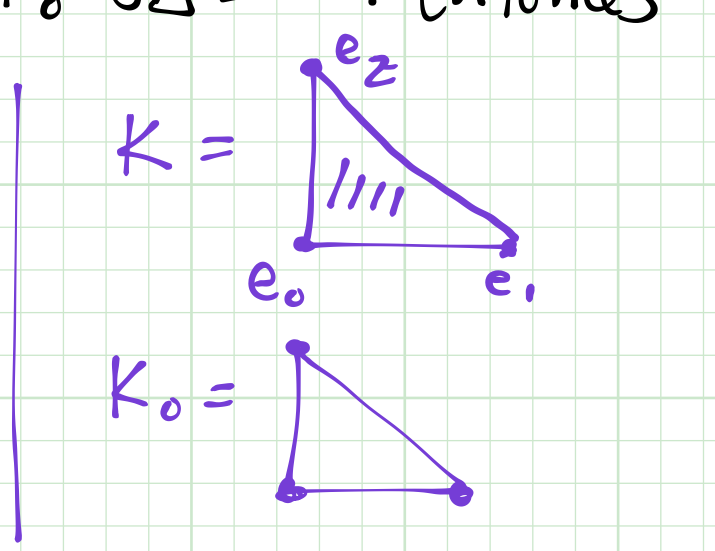
#4 Si K conexo, $\emptyset \neq K_0 \subseteq K$, entonces $H_0(K, K_0) = 0$



Al ser K conexo, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ generado por $[\sigma_0]$, σ_0 cualquier vértice. Podemos tomar $\sigma_0 \in K_0$ para tener que $[\sigma_0] = 0$ en homología relativa.

#5 Sean $K = \Delta^n = \langle e_0, e_1, \ldots, e_n \rangle$, $K_0 = \partial \Delta^n \subseteq K$. Entonces

$$H_q(K, K_0) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & q = n \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$



Notemos que $\dim(K) = n > \underset{\dim(K_0)}{\underset{\shortparallel}{n-1}}$

$$\Rightarrow \quad C_j(K, K_0) = \frac{C_j(K)}{C_j(K_0)} = 0 \iff j \leq n-2$$

$$\Rightarrow \quad H_q(K, K_0) = 0, \quad \forall q \leq n-2.$$

Restan dos casos:

$$C_{q-1}(K, K_0) = \frac{C_{q-1}(K)}{C_{q-1}(K_0)} = \frac{C_{q-1}(K)}{C_{q-1}(K)} = 0$$

Finalmente, notemos que

$$H_n(K,K_0) = \frac{\ker\left(C_n(K,K_0) \longrightarrow C_{n-1}(K,K_0)\right)}{\operatorname{im}\left(C_{n+1}(K,K_0) \longrightarrow C_n(K,K_0)\right)}$$

$$= \ker\left(\frac{C_n(K)}{\cancelto{0}{C_n(K_0)}} \longrightarrow \cancelto{0}{\frac{C_{n-1}(K)}{C_{n-1}(K_0)}} \right)$$

$\cong C_n(K) \cong \mathbb{Z}$ generado por el único n-simplejo de Δ^n. ■

Aplicando el teo. fund. del álg. homológico se obtiene la s.e.l. en homología del par (K,K_0):

$$\cdots \to H_q(K_0) \longrightarrow H_q(K) \longrightarrow H_q(K,K_0) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(K_0) \longrightarrow H_{q-1}(K) \longrightarrow H_{q-1}(K,K_0) \to \cdots$$

que es natural en el siguiente sentido: para $f:(K,K_0)\to(L,L_0)$ función simplicial de pares, se tienen tres homo. inducidos

(i) $H_*(f): H_*(K) \longrightarrow H_*(L)$

(ii) (por restricción) $H_*(f|_{K_0}) : H_*(K_0) \longrightarrow H_*(L_0)$

(iii) $H_*(f): H_q(K,K_0) \longrightarrow H_q(L,L_0)$

$$[z]_{(K,K_0)} \longmapsto [H_q(f)(z)]_{(L,L_0)}$$

tal que el siguiente diagrama consiste de cuadros conmutativos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{q+1}(K,K_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H_q(K_0) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(K) \arrow[r] \arrow[d] & H_q(K,K_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_{q+1}(L,L_0) \arrow[r, "\partial"] & H_q(L_0) \arrow[r] & H_q(L) \arrow[r] & H_q(L,L_0) \arrow[r, "\partial"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ejemplo/cálculo

K: complejo simplicial (no nec. conexo)

$K_0 = \{x_0\}$: vértice de K

Notemos que $H_q(K_0) = 0$, $\forall\, q \geq 1$. De la s.e.l. en homología tenemos

$$\cdots \longrightarrow \cancelto{0}{H_q(K_0)} \longrightarrow H_q(K) \xrightarrow{\cong} H_q(K,K_0) \longrightarrow \cancelto{0}{H_{q-1}(K_0)} \longrightarrow \cdots$$

En dimensión $q=0$

$$0 \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}}{\overset{}{\underset{\cong}{H_0(K_0)}}} \longrightarrow \underset{\mathbb{Z}^{|K|}}{\underset{\cong}{H_0(K)}} \longrightarrow H_0(K,K_0) \longrightarrow 0$$

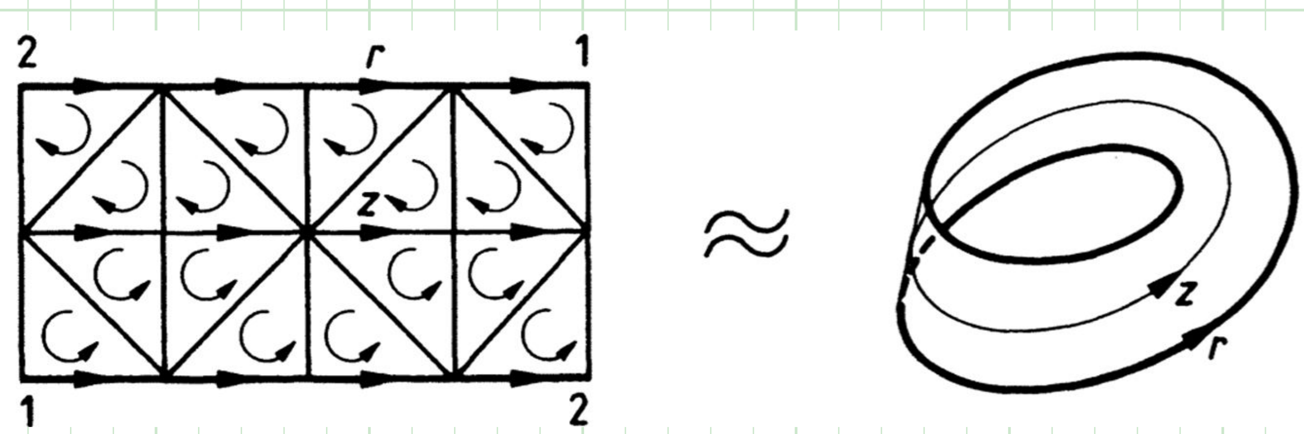
componentes de K

entonces
$$H_0(K,K_0) \cong \frac{\mathbb{Z}^{|K|}}{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^{|K|-1}$$

de la componente que contiene a $\{x_0\}$ $\blacksquare$

Por este ejemplo tenemos que $H_0(K,K_0)$ detecta la componente en donde está K_0.

b) Consideremos la triangulación de la banda de Möbius K y tomemos $K_0 = \partial M$ (determinada por r)



Recordemos que $M \simeq S^1$, donde S^1 es circunferencia central determinada por z arriba; así que $H_1(M) \cong S^1$. Por otro lado, notemos que $H_1(\partial M) \cong \mathbb{Z}$, determinada por r arriba.

La s.e.l. en homología del par $(M, \partial M)$ tiene la forma

$$0 \to \cancelto{0}{H_2(\partial M)} \to \cancelto{0}{H_2(M)} \to H_2(M,\partial M) \quad (*)$$

$$\xrightarrow{\partial_2} H_1(\partial M) \xrightarrow{H_1(r)} H_1(M) \xrightarrow{H_1(j)} H_1(M,\partial M)$$

$$\xrightarrow{\partial_1} H_0(\partial M) \xrightarrow[\cong]{H_0(r)} H_0(M) \xrightarrow{H_0(j)=0} \cancelto{0}{H_0(M,\partial M)} \to 0$$

(ver resultado anterior)

Notemos que $H_0(r)$ es isomorfismo $\Rightarrow 0 = \operatorname{Ker} H_0(r) = \operatorname{im} \partial_1$.

Por exactitud tenemos $H_1(M,\partial M) = \operatorname{Ker} \partial_1 = \operatorname{im} H_1(j)$

Además $\dfrac{H_1(M)}{\operatorname{Ker} H_1(j)} \cong \operatorname{im} H_1(j) \cong H_1(M,\partial M)$

$$\Rightarrow H_1(M,\partial M) \cong \frac{H_1(M)}{\operatorname{Ker} H_1(j)} = \frac{H_1(M)}{\operatorname{im} H_1(r)}$$

Analicemos $H_1(r) : H_1(\partial M) \to H_1(M)$. Notemos que r el generador de ∂M se mapea a dos veces z, el generador de M; es decir $\operatorname{im} H_1(r) \cong 2\mathbb{Z}$. Esto es, si c = suma de las caras orientadas de M, entonces $\partial_2(c) = r - 2z$; en homología de dimensión 1 tenemos $[\partial_2(c)] = 0 \iff [r] = 2[z]$

$$\Rightarrow H_1(r)([r]) = 2[z]$$

$$\Rightarrow \operatorname{im} H_1(r) \cong 2\mathbb{Z}.$$

$$\therefore H_1(M,\partial M) \cong \frac{H_1(M)}{\operatorname{im} H_1(r)} \cong \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/2.$$

(*) Como $H_1(r)$ es multiplicación por 2, $\operatorname{im} \partial_2 = \operatorname{Ker} H_1(r) = 0$ y se tiene una sucesión exacta $0 \to H_2(M) \xrightarrow{\cong} H_2(M,\partial M) \to 0$ de donde $H_2(M,\partial M) = 0$. ∎