

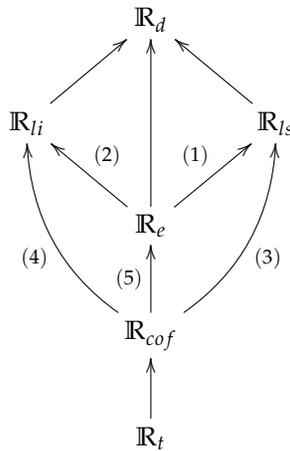
## ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE TOPOLOGÍAS EN LA RECTA REAL

MIGUEL A. MALDONADO

Sea  $\mathbb{R}$  la recta de números reales y consideremos la siguiente notación para topologías en  $\mathbb{R}$ :

- $\mathbb{R}_{tr}$ , denota la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología trivial.
- $\mathbb{R}_{cof}$ , denota la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología cofinita.
- $\mathbb{R}_e$ , denota la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología estándar.
- $\mathbb{R}_{li}$ , denota la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología del límite inferior.
- $\mathbb{R}_{ls}$ , denota la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología del límite superior.
- $\mathbb{R}_d$ , denota la recta real  $\mathbb{R}$  con la topología discreta.

La relación entre estas topologías esta expresada en el siguiente diagrama donde una flecha de la forma  $A \rightarrow B$  significa que  $B$  es mas fina que  $A$  y, equivalentemente, que  $A$  es mas gruesa que  $B$ :



Para probar las inclusiones indicadas por números nos fijamos en lo siguiente:

- (1),(2) Usaremos el criterio que vimos en clase (el Lema del libro de Munkres ). Dados  $(a, b)$  elemento de la base para la topología estándar y  $x \in (a, b)$  se tiene que  $x \in (a, x] \subseteq (a, b)$ . La inclusión (2) se hace de manera similar.
- (3),(4) Tomemos  $U$  abierto de la topología cofinita, con  $x \in U$  y pensemos que  $U$  satisface  $\mathbb{R} \setminus U = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ . Definamos

$$d = \min\{|x - r_i| \mid i = 1, 2, \dots, n\}$$

y observemos que  $x \in (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}] \subseteq U$ . Así  $U$  es abierto en la topología límite superior. La inclusión (4) se hace de manera similar.

- (5) Tomemos  $U$  como en el inciso anterior y supongamos que  $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ . Observemos que

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (r_1 - i, r_1) \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} (r_j, r_{j+1}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_n, r_n + k)$$

lo que prueba que  $U$  es abierto en la topología estándar.

Hay otras topologías que se pueden definir en la recta  $\mathbb{R}$  y resulta interesante preguntarse cómo se comparan con las topologías mostradas arriba; dejaremos ese asunto para después....