ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE TOPOLOGÍAS EN LA RECTA REAL

MIGUEL A. MALDONADO

Sea $\mathbb{R}$ la recta de números reales y consideremos la siguiente notación para topologías en $\mathbb{R}$:

- $\mathbb{R}_{tr}$, denota la recta real $\mathbb{R}$ con la topología trivial.
- $\mathbb{R}_{cof}$, denota la recta real $\mathbb{R}$ con la topología cofinita.
- $\mathbb{R}_{e}$, denota la recta real $\mathbb{R}$ con la topología estándar.
- $\mathbb{R}_{li}$, denota la recta real $\mathbb{R}$ con la topología del límite inferior.
- $\mathbb{R}_{ls}$, denota la recta real $\mathbb{R}$ con la topología del límite superior.
- $\mathbb{R}_{d}$, denota la recta real $\mathbb{R}$ con la topología discreta.

La relación entre estas topologias esta expresada en el siguiente diagrama donde una flecha de la forma $A \to B$ significa que B es mas fina que A y, equivalentemente, que A es mas gruesa que B:

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}_d & \\
\mathbb{R}_{li} \arrow[ur] & & \mathbb{R}_{ls} \arrow[ul] \\
 & \mathbb{R}_e \arrow[uu] \arrow[ul, "(2)"] \arrow[ur, "(1)"'] & \\
 & \mathbb{R}_{cof} \arrow[u, "(5)"] \arrow[uul, bend left, "(4)"] \arrow[uur, bend right, "(3)"'] & \\
 & \mathbb{R}_t \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Para probar las inclusiones indicadas por números nos fijamos en lo siguiente:

(1),(2) Usaremos el criterio que vimos en clase (el Lema del libro de Munkres). Dados (a,b) elemento de la base para la topologia estándar y $x \in (a,b)$ se tiene que $x \in (a,x] \subseteq (a,b)$. La inclusión (2) se hace de manera similar.

(3),(4) Tomemos U abierto de la topología cofinita, con $x \in U$ y pensemos que U satisface $\mathbb{R}\backslash U = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Definamos

$$d = \min\{|x - r_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

y observemos que $x \in (x - \frac{d}{2}, x + \frac{d}{2}] \subseteq U$. Así U es abierto en la topologia limite superior. La inclusión (4) se hace de manera similar.

(5) Tomemos U como en el inciso anterior y supongamos que $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$. Observemos que

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} (r_1 - i, r_1) \cup \bigcup_{j=1}^{n-1} (r_j, r_{j+1}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_n, r_n + k)$$

lo que prueba que U es abierto en la topologia estándar.

Hay otras topologias que se pueden definir en la recta $\mathbb{R}$ y resulta interesante preguntarse cómo se comparan con las topologias mostradas arriba; dejaremos ese asunto para después....

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas.
E-mail address: mmaldonado@uaz.edu.mx