

Dos usos de la teoría de homología

Miguel A. Maldonado

`mmaldonado@uaz.edu.mx`

Unidad Académica de Matemáticas,
Universidad Autónoma de Zacatecas

Tepic, 2023

- 1 Dos motivaciones:
 - Un teorema en Geometría
 - Ciencia de datos
- 2 ¿Qué es homología?
 - Homología simplicial
- 3 Campos vectoriales en esferas
- 4 Homología persistente
- 5 Referencias

Primer uso: campos vectoriales tangentes

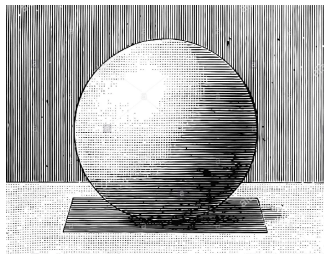
Esferas y vectores

Esferas y vectores son de los objetos mas sencillos de la geometría.

En \mathbb{R}^{n+1} consideramos los vectores unitarios:

La n -esfera:

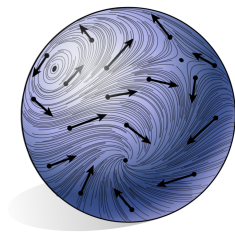
$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$



Esferas y vectores

El **espacio tangente** a S^n está dado por

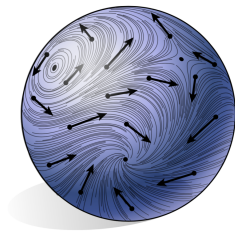
$$T(S^n) = \{(x, v) \mid x \in S^n, \langle x, v \rangle = 0\}$$



Esferas y vectores

El **espacio tangente** a S^n está dado por

$$T(S^n) = \{(x, v) \mid x \in S^n, \langle x, v \rangle = 0\}$$



Proyección a la base:

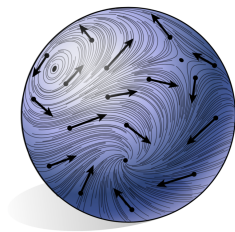
$$p : T(S^n) \longrightarrow S^n$$

$$(x, v) \longrightarrow x$$

Esferas y vectores

El **espacio tangente** a S^n está dado por

$$T(S^n) = \{(x, v) \mid x \in S^n, \langle x, v \rangle = 0\}$$



Proyección a la base:

$$p : T(S^n) \longrightarrow S^n$$

$$(x, v) \longrightarrow x$$

Una función inversa a p es llamado un **campo vectorial tangente**.

Esferas y vectores

Campo vectorial tangente en S^n :

$$V : S^n \longrightarrow T(S^n), \quad x \mapsto (x, v_x),$$

donde $\langle x, v_x \rangle = 0$.

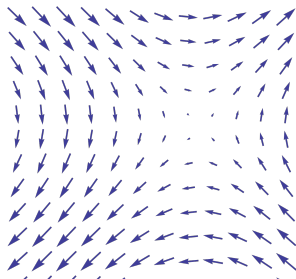
Esferas y vectores

Campo vectorial tangente en S^n :

$$V : S^n \longrightarrow T(S^n), \quad x \mapsto (x, v_x),$$

donde $\langle x, v_x \rangle = 0$.

Los campos vectoriales se relacionan con **sistemas dinámicos**, **modelación gráfica**, **robótica**, etc.



El teorema

Una **singularidad** de un campo vectorial es un $x \in S^n$ tal que $v_x = 0$.

El teorema

Una **singularidad** de un campo vectorial es un $x \in S^n$ tal que $v_x = 0$.

Teorema

S^n tiene un campo vectorial tangente (sin singularidades) $\iff n$ es impar.

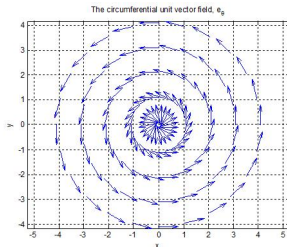
El teorema

Una **singularidad** de un campo vectorial es un $x \in S^n$ tal que $v_x = 0$.

Teorema

S^n tiene un campo vectorial tangente (sin singularidades) $\iff n$ es impar.

Para el caso $n = 1$:



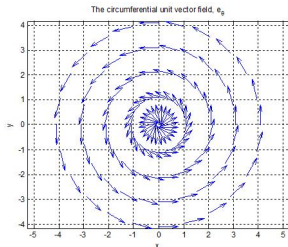
El teorema

Una **singularidad** de un campo vectorial es un $x \in S^n$ tal que $v_x = 0$.

Teorema

S^n tiene un campo vectorial tangente (sin singularidades) $\iff n$ es impar.

Para el caso $n = 1$:



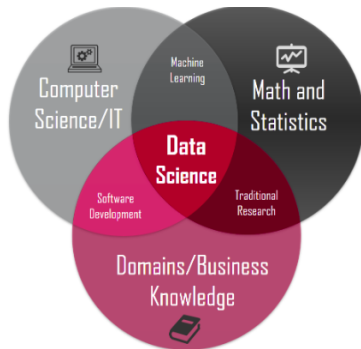
Para $n = 2$ hay singularidades:



Teo. de la Bola Peluda

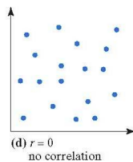
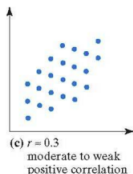
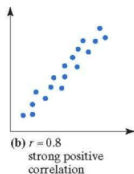
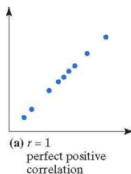
2do uso: la forma de los datos

La **Ciencia de Datos** busca obtener, tratar, analizar, depurar y manipular información.

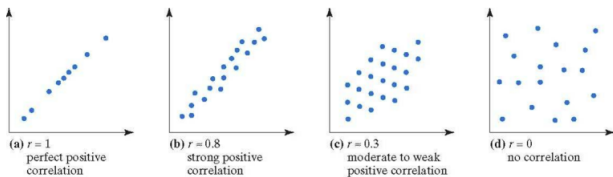


Es un área multidisciplinaria donde las matemáticas y las ciencias computacionales tienen una gran presencia.

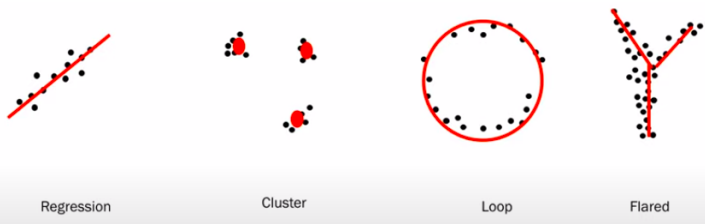
Cuando los datos son representados gráficamente se buscan patrones que reflejen relaciones entre ellos



Cuando los datos son representados gráficamente se buscan patrones que reflejen relaciones entre ellos

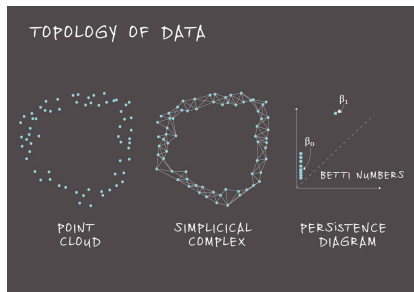


En particular, la *forma* en que se distribuyan determina el modelo aplicado para analizarlos

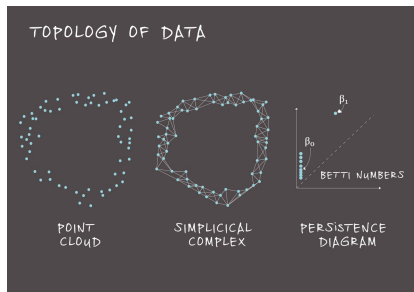


Este análisis es llamado *The Shape of Data*.

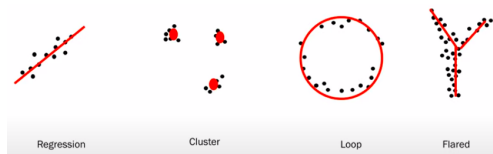
La homología es una herramienta para estudiar nubes de datos



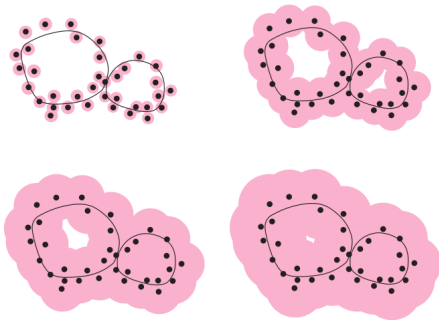
La homología es una herramienta para estudiar nubes de datos



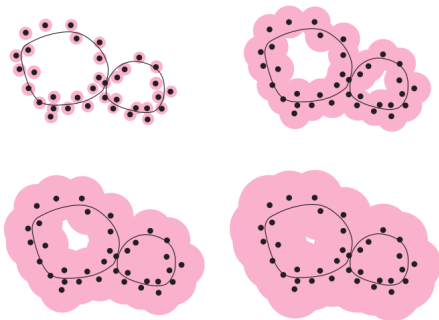
la información obtenida de este análisis permite distinguir entre los tres primeros casos:



Ejemplo. Muestra discreta de un objeto continuo

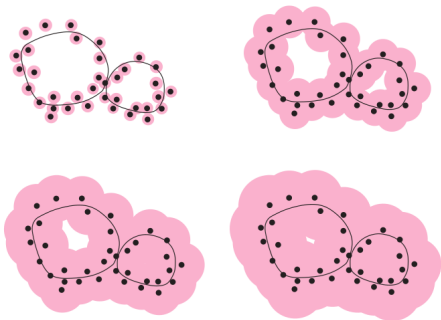


Ejemplo. Muestra discreta de un objeto continuo



- Si la muestra es densa entonces contiene información sobre el espacio escondido.

Ejemplo. Muestra discreta de un objeto continuo



- Si la muestra es densa entonces contiene información sobre el espacio escondido.
- Como la muestra tiene una topología trivial, se buscan otros espacios asociados para obtener esa información.

¿Qué es homología?

Homología

Traducimos problemas geométricos a problemas algebraicos mediante

$$X \longrightarrow A(X),$$

donde $A(X)$ puede ser un número, un grupo, un espacio vectorial, etc.

Homología

Traducimos problemas geométricos a problemas algebraicos mediante

$$X \longrightarrow A(X),$$

donde $A(X)$ puede ser un número, un grupo, un espacio vectorial, etc.

Naturalidad:

$$X \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} Y \quad \Rightarrow \quad A(X) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} A(Y)$$

...y también:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} & Y \\
 & \searrow & \updownarrow \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 A(X) & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} & A(Y) \\
 & \searrow & \updownarrow \\
 & & A(Z)
 \end{array}$$

Homología

Traducimos problemas geométricos a problemas algebraicos mediante

$$X \longrightarrow A(X),$$

donde $A(X)$ puede ser un número, un grupo, un espacio vectorial, etc.

Naturalidad:

$$X \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} Y \quad \Rightarrow \quad A(X) \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} A(Y)$$

...y también:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} & Y \\
 & \searrow & \updownarrow \\
 & & Z
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 A(X) & \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longleftarrow \end{array} & A(Y) \\
 & \searrow & \updownarrow \\
 & & A(Z)
 \end{array}$$

Consecuencia: si $X \cong Y$, entonces $A(X) \cong A(Y)$.

Homología

La asociación se da en dos pasos:

- 1 Dado un espacio X se construye un sistema

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Homología

La asociación se da en dos pasos:

- 1 Dado un espacio X se construye un sistema

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

- 2 ... y se toman cocientes sucesivos:

$$\cdots H_{k+1}(X) = \frac{\ker \partial_{k+1}}{\operatorname{im} \partial_{k+2}}, H_k(X) = \frac{\ker \partial_k}{\operatorname{im} \partial_{k+1}}, H_{k-1}(X) = \frac{\ker \partial_{k-1}}{\operatorname{im} \partial_k}, \cdots$$

cuyos elementos $[z]$ son llamados **clases de homología**.

Homología

La asociación se da en dos pasos:


- 1 Dado un espacio X se construye un sistema

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1}(X) \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

- 2 ... y se toman cocientes sucesivos:

$$\cdots H_{k+1}(X) = \frac{\ker \partial_{k+1}}{\text{im} \partial_{k+2}}, \quad H_k(X) = \frac{\ker \partial_k}{\text{im} \partial_{k+1}}, \quad H_{k-1}(X) = \frac{\ker \partial_{k-1}}{\text{im} \partial_k}, \quad \cdots$$

cuyos elementos $[z]$ son llamados **clases de homología**.

 Las clases de homología pueden verse como clases laterales o como clases de equivalencia:

$$[z] = z + \text{im} \partial_k; \quad \text{equivalentemente: } z_1 \sim z_2 \iff z_1 - z_2 \in \text{im} \partial$$

Homología

Los espacios vectoriales $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$... *leen* ciertos aspectos de X .

Homología

Los espacios vectoriales $H_0(X)$, $H_1(X)$, $H_2(X)$... *leen* ciertos aspectos de X .

Ejemplos: dependiendo del tipo de espacio con el que se trabaja

- Homología simplicial
- Homología singular
- Homología de Floer
- Homología cúbica
- Homología celular
- ...

Un ejemplo: homología simplicial

Los elementos básicos son **simplejos**:

$$q\text{-simplejo: } \sigma_q = (v_1, v_2, \dots, v_{q+1})$$

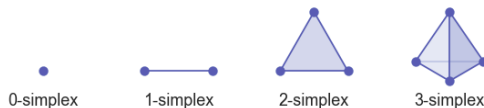
para puntos distintos, ordenados, no colineales.

Un ejemplo: homología simplicial

Los elementos básicos son **simplejos**:

$$q\text{-simplejo: } \sigma_q = (v_1, v_2, \dots, v_{q+1})$$

para puntos distintos, ordenados, no colineales.

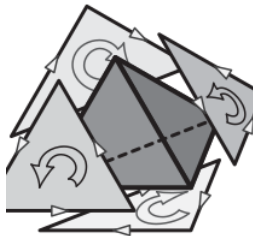
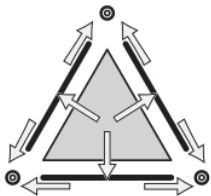


Observemos que

- **0-simplejos** = vértices (v)
- **1-simplejos** = aristas (v_1, v_2)
- **2-simplejos** = caras triangulares (v_1, v_2, v_3)
- **3-simplejos** = tetraedros rellenos (v_1, v_2, v_3, v_4)

A través de las inclusiones naturales $\sigma_{q-1} \subset \sigma_q, \forall q$ definimos:

Las **caras** de un q -simplejo σ_q son aquellos simplejos de dimensión menor contenidos en él



Un ejemplo: homología simplicial

Un **complejo simplicial** K es una colección de simplejos que se intersectan bien:

- 1 Si $\sigma \in K$, también están sus caras.
- 2 Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara en común.



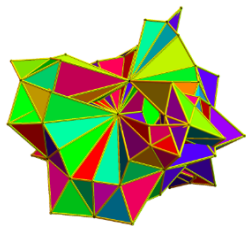
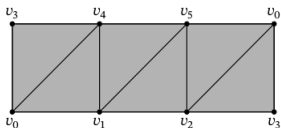
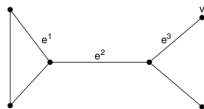
Un ejemplo: homología simplicial

Un **complejo simplicial** K es una colección de simplejos que se intersectan bien:

- 1 Si $\sigma \in K$, también están sus caras.
- 2 Si $\sigma_1, \sigma_2 \in K$, $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ ó $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara en común.



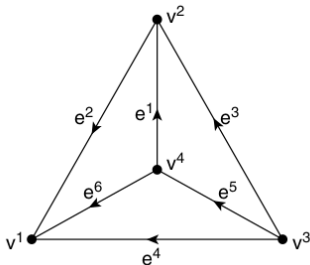
Ejemplos:



Un ejemplo: homología simplicial

Algebrizamos la estructura geométrica: $C_q(X)$ es el espacio vectorial generado por los q -simplejos de X

$$c \in C_q(X), \quad c = \alpha_1 \sigma_q^1 + \alpha_2 \sigma_q^2 + \cdots + \alpha_m \sigma_q^m, \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{F}$$



Tenemos expresiones como:

$$2e^1 + e^2 - e^6 - e^3$$

$$v^2 - v^4 - v^3$$

Un ejemplo: homología simplicial

Suma de q -cadenas:

$$\left(\sum \alpha_i \sigma_q^i\right) + \left(\sum \beta_i \sigma_q^i\right) := \sum (\alpha_i + \beta_i) \sigma_q^i$$

Inversos: $c = \sum \alpha_i \sigma_q^i$ es $-c = \sum (-\alpha_i) \sigma_q^i$.

Multiplicación por escalar:

$$\alpha c = \alpha \alpha_1 \sigma_q^1 + \alpha \alpha_2 \sigma_q^2 + \cdots + \alpha \alpha_m \sigma_q^m,$$

para $\alpha \in \mathbb{F}$.

De lo anterior se obtiene una colección de espacios vectoriales $\{C_k(X)\}_{k \geq 0}$ relacionados entre sí mediante el **operador frontera**...

- Para 0-simplejos:

$$\partial(v) = 0$$
- Para dimension 1:

$$\partial(v_1, v_2) := (v_2) - (v_1)$$
- Para dimension 2:

$$\begin{aligned} \partial(v_1, v_2, v_3) := \\ (v_2, v_3) - (v_1, v_3) + (v_1, v_2) \end{aligned}$$
- Para 3-simplejos:

$$\begin{aligned} \partial(v_1, v_2, v_3, v_4) := (v_2, v_3, v_4) - \\ (v_1, v_3, v_4) + (v_1, v_2, v_4) - (v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

De lo anterior se obtiene una colección de espacios vectoriales $\{C_k(X)\}_{k \geq 0}$ relacionados entre sí mediante el **operador frontera**...

- Para 0-simplejos: $\partial(v) = 0$
- Para dimension 1: $\partial(v_1, v_2) := (v_2) - (v_1)$
- Para dimension 2: $\partial(v_1, v_2, v_3) := (v_2, v_3) - (v_1, v_3) + (v_1, v_2)$
- Para 3-simplejos: $\partial(v_1, v_2, v_3, v_4) := (v_2, v_3, v_4) - (v_1, v_3, v_4) + (v_1, v_2, v_4) - (v_1, v_2, v_3)$

Para una cadena $c = \sum \alpha_i \sigma_k^i \in C_k(X)$ definimos

$$\partial_k(c) := \sum \alpha_i \partial_k \sigma_k^i$$

Notemos que $\partial_k(c) \in C_{k-1}(X)$.

Operador frontera

Teorema

En la colección

$$\cdots \longrightarrow C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0$$

se satisface que $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0, \forall k \geq 0$

Operador frontera

Teorema

En la colección

$$\cdots \longrightarrow C_k(X) \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \longrightarrow 0$$

se satisface que $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0, \forall k \geq 0$

Notación.

- Una p -cadena $z \in C_p$ es p -**ciclo** si $\partial_p z = 0$; denotamos por $Z_p(X)$ al subgrupo de p -ciclos y notamos que $Z_p(X) = \ker \partial_p$.
- Una p -cadena $z \in C_p$ es llamada una p -**frontera** si existe $c \in C_{p+1}(X)$ tal que $\partial_{p+1} c = z$; denotamos por $B_p(X)$ y notamos que $B_p(X) = \text{im} \partial_{p+1}$.

Ciclos y fronteras

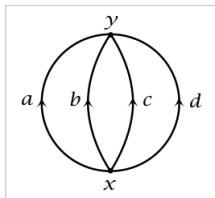


Figure: Tres 1-ciclos

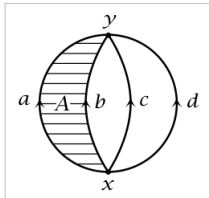


Figure: Dos 1-ciclos

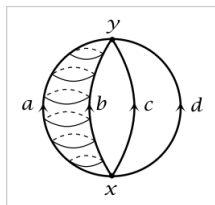


Figure: Dos 1-ciclos, un 2-ciclo

Ciclos y fronteras

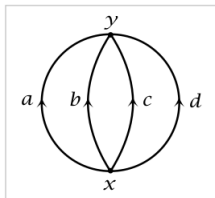


Figure: Tres 1-ciclos

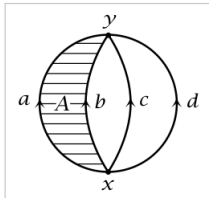


Figure: Dos 1-ciclos

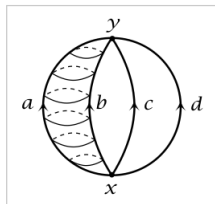


Figure: Dos 1-ciclos, un 2-ciclo

⚠ Nos interesa detectar aquellos ciclos que no son frontera de simplejos de dimensión mayor.

Por el resultado sobre el operador frontera

$$B_k(X) \subset Z_k(X), \quad \forall k \geq 0$$

Nos interesa determinar aquellos elementos de $Z_k(X)$ que **no** están en $B_k(X)$; es decir, determinar las distintas clases laterales del cociente $Z_k(X)/B_k(X)$.

Por el resultado sobre el operador frontera

$$B_k(X) \subset Z_k(X), \quad \forall k \geq 0$$

Nos interesa determinar aquellos elementos de $Z_k(X)$ que **no** están en $B_k(X)$; es decir, determinar las distintas clases laterales del cociente $Z_k(X)/B_k(X)$.

La k -ésimo **homología simplicial** de X :

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X)$$

Por el resultado sobre el operador frontera

$$B_k(X) \subset Z_k(X), \quad \forall k \geq 0$$

Nos interesa determinar aquellos elementos de $Z_k(X)$ que **no** están en $B_k(X)$; es decir, determinar las distintas clases laterales del cociente $Z_k(X)/B_k(X)$.

La k -ésimo **homología simplicial** de X :

$$H_k(X) := Z_k(X)/B_k(X)$$

 Cuando se dice la **homología de X** nos referimos a la colección

$$H_*(X) = \{H_0(X), H_1(X), H_2(X), \dots\}$$

Cálculos de homología

Cálculos

- Para $X = \emptyset$ los grupos $C_k(X)$ son triviales, así que $H_k(X)$ también son triviales.

Cálculos

- Para $X = \emptyset$ los grupos $C_k(X)$ son triviales, así que $H_k(X)$ también son triviales.
- Si $X = \{x_0\}$ entonces $C_k(X) = 0, \forall k \geq 1$ y $C_0(X)$ tiene un generador.

Cálculos

- Para $X = \emptyset$ los grupos $C_k(X)$ son triviales, así que $H_k(X)$ también son triviales.
- Si $X = \{x_0\}$ entonces $C_k(X) = 0, \forall k \geq 1$ y $C_0(X)$ tiene un generador. De aquí se tiene que el complejo de cadenas tenga la forma

$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{F} \longrightarrow 0$$

Cálculos

- Para $X = \emptyset$ los grupos $C_k(X)$ son triviales, así que $H_k(X)$ también son triviales.
- Si $X = \{x_0\}$ entonces $C_k(X) = 0, \forall k \geq 1$ y $C_0(X)$ tiene un generador. De aquí se tiene que el complejo de cadenas tenga la forma

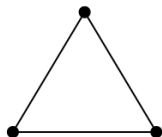
$$\dots \longrightarrow 0 \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} 0 \xrightarrow{\partial} \mathbb{F} \longrightarrow 0$$

Finalmente, haciendo el cálculo de los cocientes:

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{F}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

Cálculos

- Tomemos una triangulación para la circunferencia unitaria:



Sólo hay información en dimensiones 0, 1:
 $C_0(X)$, $C_1(X)$, tienen 3 generadores cada uno.

Basta estudiar el operador frontera $\partial : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$ para obtener:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

olving

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_4 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_4.$$

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{F}, & k = 0, 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$$

Cálculos

- Tomemos un triángulo relleno X



Hay información en dimensiones 0, 1, 2:
 $C_0(X)$, $C_1(X)$, $C_2(X)$, tienen 3, 3 y 1 generadores, resp.

Basta estudiar el operador frontera $\partial : C_1(X) \rightarrow C_0(X)$ para obtener:



$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{F}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

Propiedades de la homología

Propiedades

- **Componentes conexas:** son subconjuntos conexos maximales de un espacio, los *pedazos* de los que está compuesto.



Ejemplos.

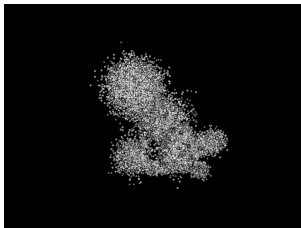
- 1 Los espacios  X  Y tienen una y dos componentes, respectivamente.

Propiedades

- **Componentes conexas:** son subconjuntos conexos maximales de un espacio, los *pedazos* de los que está compuesto.

Ejemplos.

- 1 Los espacios  X  Y tienen una y dos componentes, respectivamente.
- 2 Una nube de puntos \mathcal{P} tiene $|\mathcal{P}|$ componentes



Teorema

Si $P = \{P_i\}_{i=1}^n$ es una colección de vértices, uno por cada componente conexa de X , entonces P forma una base para $H_0(X)$.

Teorema

Si $P = \{P_i\}_{i=1}^n$ es una colección de vértices, uno por cada componente conexa de X , entonces P forma una base para $H_0(X)$.

Es decir, $H_0(X)$ tiene tantos generadores como componentes conexas.

Teorema

Si $P = \{P_i\}_{i=1}^n$ es una colección de vértices, uno por cada componente conexa de X , entonces P forma una base para $H_0(X)$.

Es decir, $H_0(X)$ tiene tantos generadores como componentes conexas.

Ejemplos. En el caso de los espacios anteriores,

$$H_0(X) = \mathbb{F}, \quad H_0(Y) = \mathbb{F} \times \mathbb{F} = \mathbb{F}^2,$$

donde los correspondientes generadores se pueden elegir como vértices en cada componente. Para la nube de puntos \mathcal{P}

$$\# \text{de generadores de } H_0(\mathcal{P}) = |\mathcal{P}|$$

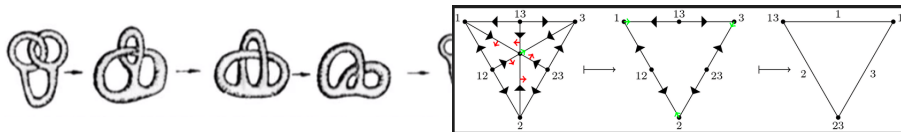
- **Invarianza.** Si $X \cong X'$ entonces

$$H_k(X) \cong H_k(X'), \quad \forall k \geq 0$$

- **Invarianza.** Si $X \cong X'$ entonces

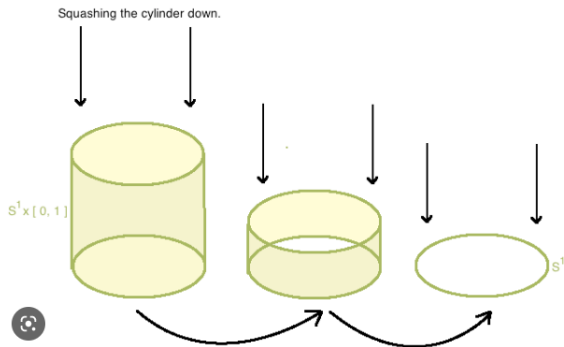
$$H_k(X) \cong H_k(X'), \quad \forall k \geq 0$$

Algunas deformaciones está motivadas por la topología o por la combinatoria:

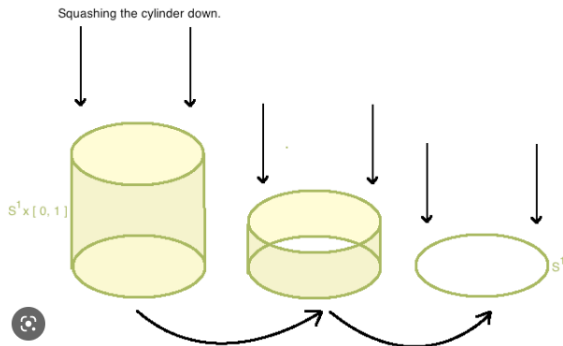


En particular, los cálculos no se alteran si la figura se rota o re-escala

- **Invarianza.** Si $X \simeq X'$ entonces $H_k(X) \cong H_k(X'), \forall k \geq 0$



- **Invarianza.** Si $X \simeq X'$ entonces $H_k(X) \cong H_k(X'), \forall k \geq 0$

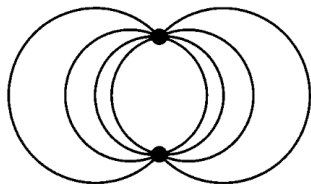


Así, todo espacio contráctil X tiene la homología de un punto:

$$H_k(X) = \begin{cases} \mathbb{F}, & k = 0 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

- $H_1(X)$ y "agujeros". Un 1-ciclo no trivial es una curva cerrada simple:

En el plano los 1-ciclos tienen un interior y un exterior.



En el plano, los generadores de H_1 corresponden a las fronteras de regiones cerradas y acotadas.

Teorema

Los generadores de $H_1(X)$ corresponden a los 1-ciclos que no son frontera de triángulos.

Teorema

Los generadores de $H_1(X)$ corresponden a los 1-ciclos que no son frontera de triángulos.

Ejemplo. Para las regiones



$$H_1(X_a) = 0, \quad H_1(X_b) = \mathbb{F}$$

$$H_1(X_c) = \mathbb{F}^2, \quad H_1(X_d) = \mathbb{F}$$

Observemos también que $H_0 = \mathbb{F}$ para todos los casos anteriores. ◀

Homología de esferas

Algunos problemas de la geometría pueden ser resueltos con homología:



Sphere



circle

$$H_1(S^1) = \mathbb{F}, \quad H_k(S^1) = 0, \quad k \neq 1$$

$$H_2(S^2) = \mathbb{F}, \quad H_k(S^2) = 0, \quad k \neq 2$$

Homología de esferas

Algunos problemas de la geometría pueden ser resueltos con homología:



Sphere



circle

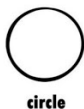
$$H_1(S^1) = \mathbb{F}, \quad H_k(S^1) = 0, k \neq 1$$

$$H_2(S^2) = \mathbb{F}, \quad H_k(S^2) = 0, k \neq 2$$

$$\text{En general } H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{F}, & k = 0, n \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

Homología de esferas

Algunos problemas de la geometría pueden ser resueltos con homología:



$$H_1(S^1) = \mathbb{F}, \quad H_k(S^1) = 0, k \neq 1$$

$$H_2(S^2) = \mathbb{F}, \quad H_k(S^2) = 0, k \neq 2$$

$$\text{En general } H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{F}, & k = 0, n \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

En particular:

- Si $n \neq m$, $S^n \not\cong S^m$
- La homología distingue los distintos tipos de "hoyos" que tienen.
- Si $H_k(X) \neq 0$, entonces X "tiene" una k -esfera.

- **Homología y funciones.**

- **Homología y funciones.** Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ produce homomorfismo $C_k(f) : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ que permite definir

$$f_*([z]) := \varphi(z), \quad [z] \in H_k(X)$$

- **Homología y funciones.** Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ produce homomorfismo $C_k(f) : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ que permite definir

$$f_*([z]) := \varphi(z), \quad [z] \in H_k(X)$$

De esto se obtiene $f_k : H_k(X) \rightarrow H_k(Y), \forall k \geq 0$ con propiedades funtoriales:

- **Homología y funciones.** Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ produce homomorfismo $C_k(f) : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ que permite definir

$$f_*([z]) := \varphi(z), \quad [z] \in H_k(X)$$

De esto se obtiene $f_k : H_k(X) \rightarrow H_k(Y), \forall k \geq 0$ con propiedades functoriales:

- Para la identidad $1 : X \rightarrow X$ se tiene que

$$1_* = 1 : H_k(X) \rightarrow H_k(X)$$

- Para $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ tenemos

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Z)$$

Algunas referencias

- Fraleigh, **A First Course in Abstract Algebra**, Pearson, 2002.
- Wildberger, *An introduction to homology*, Insights into Mathematics, video de YouTube.
- Adams, Franzosa, **Intro. to Topology, Pure and Applied**, Pearson, 2008
- Hatcher, **Algebraic Topology**, Cambridge, 2002
- Edelsbrunner, Harer, **Computational Topology**, AMS, 2010
- Ghrist, R., **Elementary Algebraic Topology**, 2014.
- Nanda, V., **Computational Algebraic Topology**. Disponible [aquí](#)

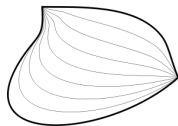
Campos vectoriales

Homotopía

Una **homotopía** entre $f, g : X \rightarrow Y$ es una colección de funciones

$$\{H_t : X \rightarrow Y\}_{t \in [0,1]},$$

tales que $H_0 = f, H_1 = g$.



Homotopía

Una **homotopía** entre $f, g : X \rightarrow Y$ es una colección de funciones

$$\{H_t : X \rightarrow Y\}_{t \in [0,1]},$$

tales que $H_0 = f, H_1 = g$.



X, Y son **homotópicos** si existen f, g tales que

$$f \circ g \simeq 1_Y, \quad g \circ f \simeq 1_X$$

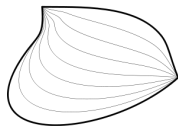
Aquí f es llamada **equivalencia homotópica**, con g **inversa homotópica** de f .

Homotopía

Una **homotopía** entre $f, g : X \rightarrow Y$ es una colección de funciones

$$\{H_t : X \rightarrow Y\}_{t \in [0,1]},$$

tales que $H_0 = f, H_1 = g$.



X, Y son **homotópicos** si existen f, g tales que

$$f \circ g \simeq 1_Y, \quad g \circ f \simeq 1_X$$

Aquí f es llamada **equivalencia homotópica**, con g **inversa homotópica** de f .

- Para f, g homotópicas $f_k = g_k : H_k(X) \rightarrow H_k(Z), \forall k$.

Grado de funciones

El **grado** de $f : S^n \rightarrow S^n$ es el entero $\deg(f)$ tal que

$$f_n : H_n(S^n) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}, \quad [z] \mapsto \deg(f)[z]$$

Propiedades:

- $\deg(1_X) = 1$, $\deg(g \circ f) = \deg(g)\deg(f)$
- Si $f \simeq g$, entonces $\deg(f) = \deg(g)$
- Si f es equivalencia homotópica, $\deg(f) = \pm 1$

Reflexión ortogonal

Hiperplano ortogonal para $v \in \mathbb{R}^n$

$$H_v = v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0\}$$

Reflexión a lo largo de v :

$$S_v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x - 2 \frac{\langle v, x \rangle}{\langle v, v \rangle} v$$

Propiedades::

- S_v es transformación lineal
- $S_v(H_v) = H_v$
- S_v es una reflexión
- $\langle S_v(x), S_v(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
- $\Rightarrow S_v : S^n \rightarrow S^n$
- $\deg(S_v) = -1$

Función antipodal: $A : S^n \rightarrow S^n$

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto -\bar{x} = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

Función antipodal: $A : S^n \rightarrow S^n$

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto -\bar{x} = (-x_1, \dots, -x_{n+1})$$

Teorema

El grado de la función antipodal $A : S^n \rightarrow S^n$ es $(-1)^{n+1}$

Dem. Tomamos base canónica $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ y observamos que

$$A = S_{e_1} \circ S_{e_2} \circ \dots \circ S_{e_{n+1}}.$$

Finalmente, $\deg(A) = (-1)(-1) \cdots (-1) = (-1)^{n+1}$. ■

Resultados (sin demostración?)

Teorema

Si $f : S^n \rightarrow S^n$ no tiene puntos fijos, $f \simeq A$.

Así que $\deg(f) = (-1)^{n+1}$

Teorema

Si $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ no tiene puntos fijos, existe x_0 tal que $f(x_0) = -x_0$.

Corolario

No existe $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ tal que $f(\bar{x}) \perp \bar{x}, \forall \bar{x} \in S^{2n}$.

El teorema

Teorema

S^n tiene un campo vectorial tangente (sin singularidades) $\iff n$ es impar.

Dem. \Leftarrow Sea $n = 2m - 1$ y definamos

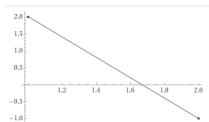
$$v_{\bar{x}} := (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \dots, x_{2m}, -x_{2m-1}),$$

para $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{2m}) \in S^{2m-1}$. Con esto definimos el campo vectorial tangente

$$\sigma : S^{2m-1} \rightarrow T(S^{2m-1}), \quad \bar{x} \mapsto (\bar{x}, v_{\bar{x}})$$

! Para $m = 1$ tenemos

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_2, -x_1)$$



El teorema

⇒ Si existe campo vectorial tangente

$$\sigma : S^n \rightarrow T(S^n), \quad \bar{x} \mapsto (\bar{x}, v_{\bar{x}})$$

definimos

$$f : S^n \rightarrow S^n, \quad f(\bar{x}) = \frac{v_{\bar{x}}}{\|v_{\bar{x}}\|}$$

El teorema

⇒ Si existe campo vectorial tangente

$$\sigma : S^n \rightarrow T(S^n), \quad \bar{x} \mapsto (\bar{x}, v_{\bar{x}})$$

definimos

$$f : S^n \rightarrow S^n, \quad f(\bar{x}) = \frac{v_{\bar{x}}}{\|v_{\bar{x}}\|}$$

Por construcción se tiene $\langle \bar{x}, f(\bar{x}) \rangle = 0$, lo cual es imposible si n es par. ■

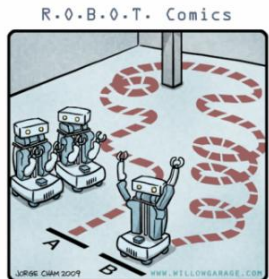
Aplicación

La **Topología Robótica** usa métodos topológicos para modelar y resolver problemas en robótica, así como para implementar soluciones.

Aplicación

La **Topología Robótica** usa métodos topológicos para modelar y resolver problemas en robótica, así como para implementar soluciones.

Un **algoritmo de planeación motriz** son las instrucciones para el movimiento de agentes en cierta región.



"HIS PATH-PLANNING MAY BE SUB-OPTIMAL, BUT IT'S GOT FLAIR."

Aplicación

La **complejidad topológica** $TC(X)$ determina qué tan complicado es modelar el *movimiento* en X .

Aplicación

La **complejidad topológica** $TC(X)$ determina qué tan complicado es modelar el *movimiento* en X .

Lema

$$TC(S^1) = 2$$

Aplicación

La **complejidad topológica** $TC(X)$ determina qué tan complicado es modelar el *movimiento* en X .

Lema

$$TC(S^1) = 2$$

Demostración: las instrucciones de movimiento en S^1 son posibles porque existen campos vectoriales tangentes!! ■

Aplicación

La **complejidad topológica** $TC(X)$ determina qué tan complicado es modelar el *movimiento* en X .

Lema

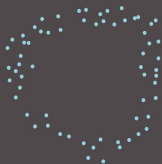
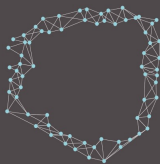
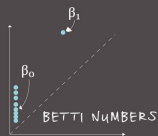
$$TC(S^1) = 2$$

Demostración: las instrucciones de movimiento en S^1 son posibles porque existen campos vectoriales tangentes!! ■

Como S^2 no tiene campo vectorial tangente, $TC(S^2) = 3$.

La forma de los datos

TOPOLOGY OF DATA

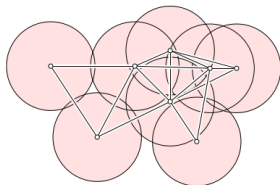
POINT
CLOUDSIMPLICIAL
COMPLEXPERSISTENCE
DIAGRAM

Complejo de Vietoris-Rips

Modelamos una **nube de datos** mediante un conjunto finito $P \subset \mathbb{R}^n$.
Para $\varepsilon > 0$ el complejo de **Vietoris-Rips** $VR^\varepsilon(P)$ tiene por simplejos:

Modelamos una **nube de datos** mediante un conjunto finito $P \subset \mathbb{R}^n$.
 Para $\varepsilon > 0$ el complejo de **Vietoris-Rips** $VR^\varepsilon(P)$ tiene por simplejos:

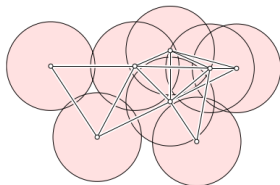
$\{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ determina un q -simplejo en $VR^\varepsilon(P)$



\iff

$$d(v_i, v_j) \leq 2\varepsilon, \forall i \neq j$$

Modelamos una **nube de datos** mediante un conjunto finito $P \subset \mathbb{R}^n$.
 Para $\varepsilon > 0$ el complejo de **Vietoris-Rips** $VR^\varepsilon(P)$ tiene por simplejos:



$\{v_0, v_1, \dots, v_q\}$ determina un q -simplejo en $VR^\varepsilon(P)$

\iff

$$d(v_i, v_j) \leq 2\varepsilon, \forall i \neq j$$

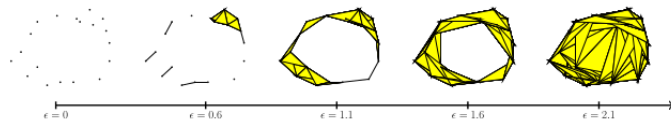
Notemos que:

- Los elementos de P son los vértices de $VR^\varepsilon(P)$, $\forall \varepsilon$.
- Para $\varepsilon \leq \varepsilon'$, $VR^\varepsilon(P) \subset VR^{\varepsilon'}(P)$.

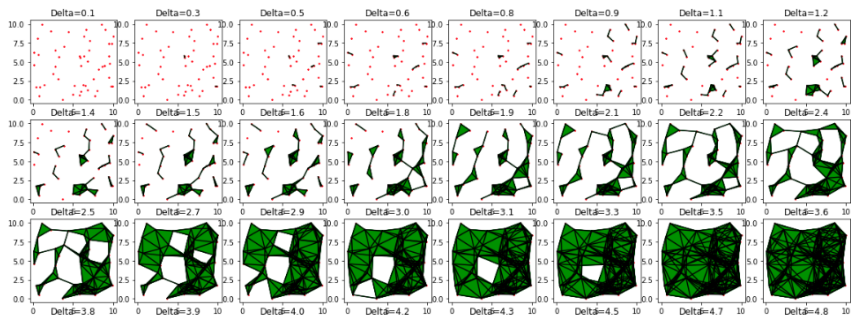
Variando ε obtenemos una colección de espacios



Variando ε obtenemos una colección de espacios



Ejemplo: $|P| = 50$, elementos aleatorios.



Haciendo $X_i := VR^{\varepsilon_i}(P)$ obtenemos una **filtración**

$$X_0 \xrightarrow{f^0} X_1 \xrightarrow{f^1} \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} X_n,$$

donde f^i son inclusiones.

Haciendo $X_i := VR^{\varepsilon_i}(P)$ obtenemos una **filtración**

$$X_0 \xrightarrow{f^0} X_1 \xrightarrow{f^1} \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} X_n,$$

donde f^i son inclusiones. Para $k \geq 0$ **fija** consideramos los homomorfismos en homología:

$$H_k(X_0) \xrightarrow{f_k^0} H_k(X_1) \xrightarrow{f_k^1} \cdots \longrightarrow H_k(X_{n-1}) \xrightarrow{f_k^{n-1}} H_k(X_n)$$

llamado el **módulo de persistencia de X** .

Haciendo $X_i := VR^{\varepsilon_i}(P)$ obtenemos una **filtración**

$$X_0 \xrightarrow{f^0} X_1 \xrightarrow{f^1} \cdots \longrightarrow X_{n-1} \xrightarrow{f^{n-1}} X_n,$$

donde f^i son inclusiones. Para $k \geq 0$ **fija** consideramos los homomorfismos en homología:

$$H_k(X_0) \xrightarrow{f_k^0} H_k(X_1) \xrightarrow{f_k^1} \cdots \longrightarrow H_k(X_{n-1}) \xrightarrow{f_k^{n-1}} H_k(X_n)$$

llamado el **módulo de persistencia de X** .


Recordemos que la homología refleja propiedades geométricas....

Propiedades de la homología:

- $H_0(X)$ tiene tantos generadores/clases como componentes conexas.
- Los generadores/clases de $H_1(X)$ corresponden a curvas cerradas que no son frontera de triángulos.
- Los generadores/clases de $H_2(X)$ corresponden a *huecos* de X
- En general, los generadores/clases de $H_k(X)$ corresponden a *hoyos* k -dimensionales de X .

Propiedades de la homología:

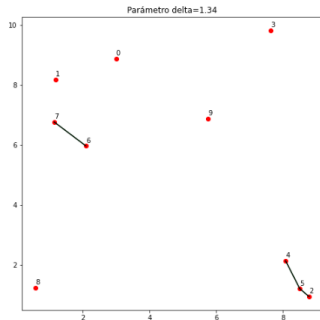
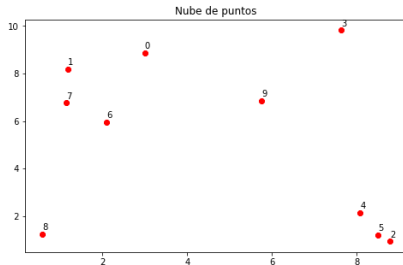
- $H_0(X)$ tiene tantos generadores/clases como componentes conexas.
- Los generadores/clases de $H_1(X)$ corresponden a curvas cerradas que no son frontera de triángulos.
- Los generadores/clases de $H_2(X)$ corresponden a *huecos* de X
- En general, los generadores/clases de $H_k(X)$ corresponden a *hoyos* k -dimensionales de X .

 Estudiar la permanencia de las clases a lo largo de la filtración nos dirá qué tan predominante es dicha característica topológica

Ejemplo. El módulo

$$H_0(X_0) \longrightarrow H_0(X_1) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X_{n-1}) \rightarrow H_0(X_n) = H_0(X)$$

permite conocer cómo varían las componentes conexas.



H_0 cambia al conectar puntos. ◀

Nacimiento y muerte

Se dice que un elemento $[z]$ **nace en** X_b

$$\text{si } [z] \in H_k(X_b) \text{ y } [z] \notin f_k^{b-1}(H_k(X_{b-1}))$$

Nacimiento y muerte

Se dice que un elemento $[z]$ **nace en** X_b

$$\text{si } [z] \in H_k(X_b) \text{ y } [z] \notin f_k^{b-1}(H_k(X_{b-1}))$$

Se dice que un elemento $[z] \in H_k(X_a)$ **muere al entrar a** X_d , con $a \leq d$,

$$\text{si } f_k^{d-1}([z]) = 0 \in H_k(X_d)$$

y además $[z]$ nació en X_i , con $i < d$.

Nacimiento y muerte


Se dice que un elemento $[z]$ **nace en** X_b

$$\text{si } [z] \in H_k(X_b) \text{ y } [z] \notin f_k^{b-1}(H_k(X_{b-1}))$$

Se dice que un elemento $[z] \in H_k(X_a)$ **muere al entrar a** X_d , con $a \leq d$,

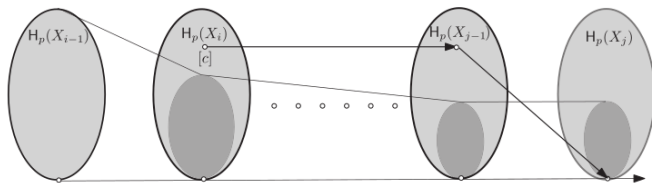
$$\text{si } f_k^{d-1}([z]) = 0 \in H_k(X_d)$$

y además $[z]$ nació en X_i , con $i < d$.

 Toda clase de homología nace en algún momento pero no toda clase muere.

Nacimiento y muerte

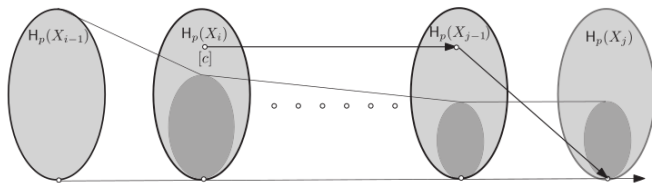
Ejemplo.



Aquí la clase $[c]$ nace en X_b y muere al entrar a X_d . ◀

Nacimiento y muerte

Ejemplo.



Aquí la clase $[c]$ nace en X_b y muere al entrar a X_d . ◀

- El nacimiento y la muerte de una clase $[z]$ se codifica mediante la pareja (b, d) , con $b < d$.
- Si una clase no muere se escribe (b, ∞) .

Diagrama de persistencia

Para cada $k \geq 0$ las clases de homología en el módulo de persistencia determinan

$$\{(b, d)\} \subset \{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\} \cup \{\infty\}$$

que representa un resumen de la información de la filtración y su homología.

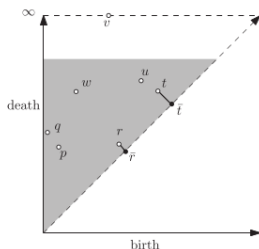


Diagrama de persistencia:
puntos (b, d) en el plano $\overline{\mathbb{R}^2}$

La **persistencia** de una clase $[z]$ se define como

$$Pers([z]) := \begin{cases} d - b, & (b, d) \\ \infty, & (b, \infty) \end{cases}$$

$Pers([z])$ mide cuánto "tiempo" permanece la clase en el análisis homológico de la filtración.

La **persistencia** de una clase $[z]$ se define como

$$Pers([z]) := \begin{cases} d - b, & (b, d) \\ \infty, & (b, \infty) \end{cases}$$

$Pers([z])$ mide cuánto "tiempo" permanece la clase en el análisis homológico de la filtración.

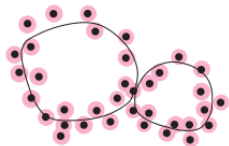
En caso de múltiples clases de homología se consideran multiplicidades:

$$(b, d)^r,$$

significa que existen k clases que nacen en b y mueren en d .

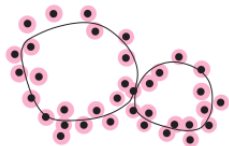
Un ejemplo: muestras discretas

Supongamos que tenemos una muestra de puntos para un objeto *continuo*:



Un ejemplo: muestras discretas

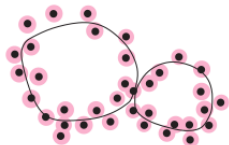
Supongamos que tenemos una muestra de puntos para un objeto *continuo*:



Se busca estudiar la distribución de los puntos para obtener información del objeto continuo.

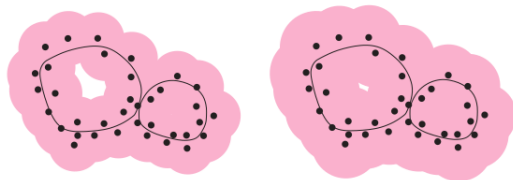
Un ejemplo: muestras discretas

Supongamos que tenemos una muestra de puntos para un objeto *continuo*:



Se busca estudiar la distribución de los puntos para obtener información del objeto continuo.

Se estudia el complejo de V-R asociado:

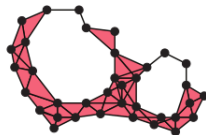


Un ejemplo: muestras discretas

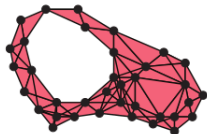
.... y se forma una filtración:



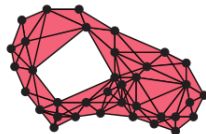
(a)



(b)



(c)

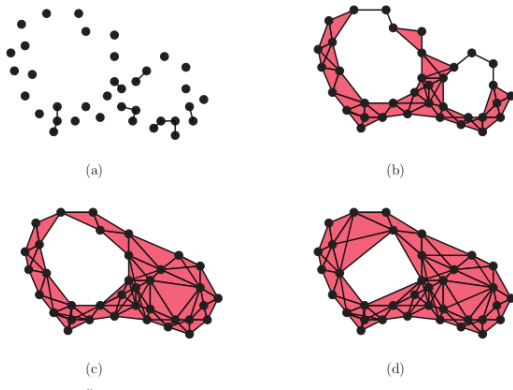


(d)

..

Un ejemplo: muestras discretas

.... y se forma una filtración:



El comportamiento de las clases en H_1 (y su persistencia) indican que existen dos hoyos existen y que uno es más grande que otro.

Otro ejemplo: lesiones en la piel

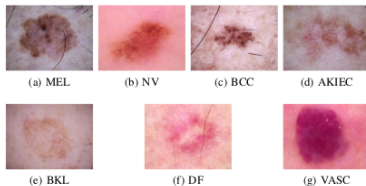
Topological approaches to skin disease image analysis

Yu-Min Chung*, Chuan-Shen Hu†, Austin Lawson*, Clifford Smyth*

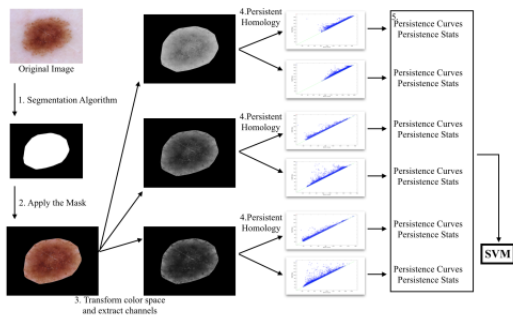
*Department of Mathematics and Statistics, University of North Carolina at Greensboro, USA

† Department of Computer Science and Information Engineering, National Normal Taiwan University, Taiwan

Abstract—This report describes the algorithms used for the UNC Greensboro team entries into the 2018 International Skin Imaging Collaboration Challenge: Tasks 1 and 3. Task 1 was a segmentation task: identify the actual diseased area of skin in a given image of a skin lesion. Task 3 was a classification task: identify the type of skin lesion pictured in a given image. The cores of the algorithms used were based in persistent homology, an algebraic topology technique that is part of the rising field of Topological Data Analysis (TDA). The segmentation algorithm is based on the lifetimes of certain features as the image is thresholded. The classification algorithms use the segmentation algorithm, calculate the persistence diagrams as the segmented image is thresholded, then run a support vector machine on vectorizations obtained from those persistence diagrams. We call



Otro ejemplo: lesiones en la piel



Comentarios finales

- Existen diversos complejos simpliciales asociados a una nube de datos: *Cech*, *alpha*, *witness*, *graph-induced*, *Delaunay*, etc.

Comentarios finales

- Existen diversos complejos simpliciales asociados a una nube de datos: *Cech*, *alpha*, *witness*, *graph-induced*, *Delaunay*, etc.
- La persistencia puede estudiarse en términos algebraicos (via Teoría de Representaciones).

Comentarios finales

- Existen diversos complejos simpliciales asociados a una nube de datos: *Cech*, *alpha*, *witness*, *graph-induced*, *Delaunay*, etc.
- La persistencia puede estudiarse en términos algebraicos (via Teoría de Representaciones).
- El diagrama de persistencia contiene la información geométrica de la nube de puntos.

Making statistical inferences or extracting meaningful information from persistence diagrams is an essential task in TDA. ~~One important line of research in TDA is the development of methods for~~

summarizing persistence diagrams is a major research area in TDA.

Su análisis se encuentra con la Estadística cuando se recurre a ciertas estructuras métricas.

Comentarios finales

- Existen diversos complejos simpliciales asociados a una nube de datos: *Cech*, *alpha*, *witness*, *graph-induced*, *Delaunay*, etc.
- La persistencia puede estudiarse en términos algebraicos (via Teoría de Representaciones).
- El diagrama de persistencia contiene la información geométrica de la nube de puntos.

Making statistical inferences or extracting meaningful information from persistence diagrams is an essential task in TDA. ~~Summarizing persistence diagrams is a major research area in TDA.~~

summarizing persistence diagrams is a major research area in TDA.

Su análisis se encuentra con la Estadística cuando se recurre a ciertas estructuras métricas.

- Hay una fuerte componente computacional en el área.

Referencias

- 1 Fugacci, U., Scaramuccia, S., Iuricich, F., De Floriani, L., **Persistent homology: a step-by-step introduction for newcomers**, STAG, 2016.
- 2 Kaczynski, T., Mischaikov, K., Mrozek, M., **Computational Homology**, Applied Mathematical Sciences 157, Springer-Verlag (2004).
- 3 Krishna, T., Wang, Y., **Computational Topology for Data Analysis**, Cambridge University Press (2022).
- 4 Nanda, V., **Computational Algebraic Topology**. Disponible [aquí](#)