# Topología de conjuntos: presentación del curso

Miguel A. Maldonado
Unidad Académica de Matemáticas, UAZ
mmaldonado@uaz.edu.mx

Semestre agosto-diciembre 2024

# Contenido


1. ¿Qué es Topología?
2. ¿Qué se estudia en Topología?
3. ¿Cómo se trabaja en Topología?
4. Qué propiedades se estudian en Topología?
5. Dónde estudiar Topología?

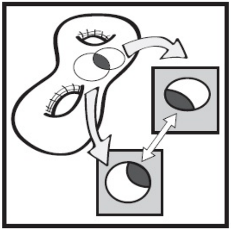
# Lo que **no** es Topología

# Lo que **sí** es Topología

# Lo que **también** es Topología

Del griego: *topos* lugar; *logos* estudio, descripción

- Área *joven* de las matemáticas ($\sim$ s. XIX)
- Área de la Geometría que estudia el concepto de ”cercanía” entre elementos de un conjunto.



- Estudia propiedades de objetos que no cambian bajo deformaciones continuas.
- Ofrece estudio cualitativo de los objetos.

# ¿Qué se estudia en Topología?

# Objetos de estudio:

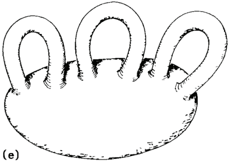
Conjuntos con *cierta noción* de distancia/cercanía entre sus elementos.

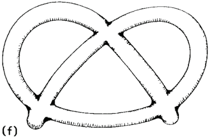
# Objetos de estudio:

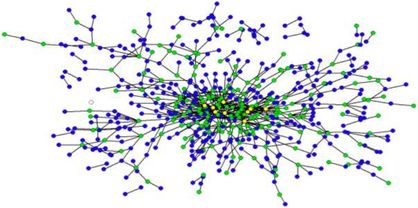
Conjuntos con *cierta noción* de distancia/cercanía entre sus elementos.

Ejemplos:

- Objetos de la Geometría: curvas, planos, superficies, etc.
- Espacios euclidianos: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, etc.
- Conjuntos que surgen de aplicaciones o de otras áreas


(e)


(f)



# Un ejemplo muy familiar

Un **espacio métrico** $M$ es un conjunto con una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \qquad \text{(función distancia)}$$

que satisface:

$$d(x,y) \geq 0, \qquad d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

## Un ejemplo muy familiar

Un **espacio métrico** $M$ es un conjunto con una función

$$d : X \times X \to \mathbb{R} \qquad \text{(función distancia)}$$

que satisface:

$$d(x,y) \geq 0, \qquad d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

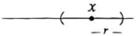
Ejemplos:

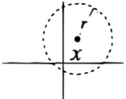
- $M = \mathbb{R}^2$,

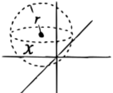
$$d(\overline{x},\overline{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

- $M = \mathbb{R}$,

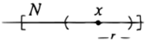
$$d(x,y) := |x - y|$$

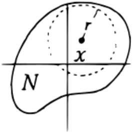


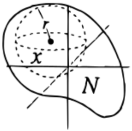




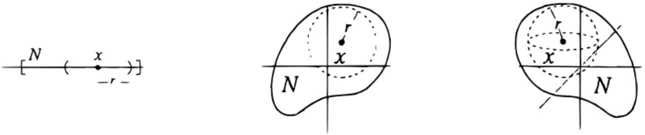
En un espacio métrico se definen nociones de cercanía a través de la noción de **vecindad**:



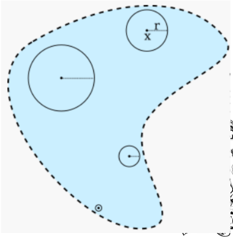



En un espacio métrico se definen nociones de cercanía a través de la noción de **vecindad**:



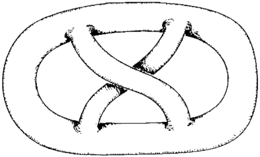

$U \subset M$ es **abierto** si cada cada $x \in U$ tiene una vecindad $N_x$ tal que $N_x \subset U$.



Los abiertos de un espacio métrico tienen cierta "aritmética" interesante:

1. El espacio métrico es un abierto
2. La unión de abiertos es también un abierto
3. La intersección de dos abiertos es también un abierto

Los espacios topológicos son objetos en los que estos fenómenos también ocurren pero sin la presencia de una métrica



# ¿Cómo se trabaja en Topología?

La Geometría Analítica distingue objetos geométricos a través de sus **ecuaciones**

La Geometría Analítica distingue objetos geométricos a través de sus **ecuaciones** ... aunque los objetos sean muy parecidos:

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \neq \{(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1\}$$

La Geometría Analítica distingue objetos geométricos a través de sus **ecuaciones** ... aunque los objetos sean muy parecidos:

$$\{x^2 + y^2 = 1\} \neq \{(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1\}$$

En Topología dos objetos son **equivalentes** si pueden deformarse uno en el otro de manera continua.

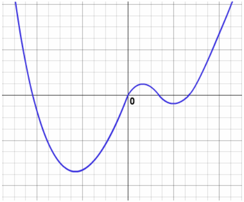
*Continuo* significa sin cortar, ni razgar; se puede apachurrar, cambiar posición.

# Objetos equivalentes en Topología

Las relaciones entre espacios topológicos se expresan mediante **funciones**:

$$f : X \longrightarrow Y$$

Se dice que $f$ es **continua** si puntos cercanos en $X$ tienen imagenes cercanas en $Y$.

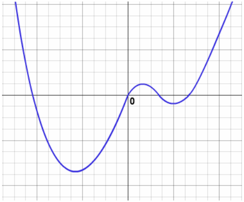


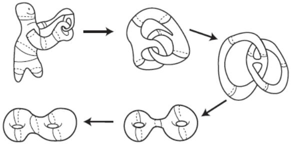
# Objetos equivalentes en Topología

Las relaciones entre espacios topológicos se expresan mediante **funciones**:

$$f : X \longrightarrow Y$$

Se dice que $f$ es **continua** si puntos cercanos en $X$ tienen imagenes cercanas en $Y$.

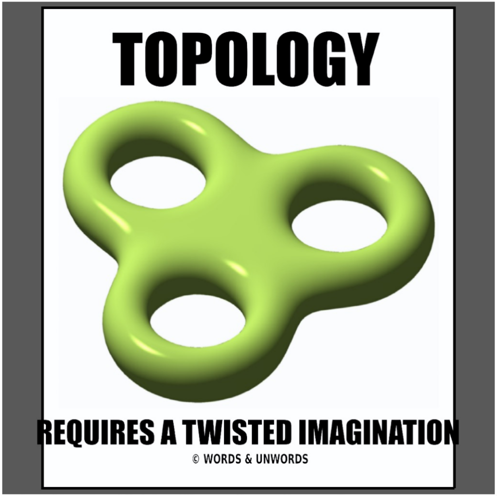


$X, Y$ son **equivalentes** si existen

$$X \longrightarrow Y, \qquad Y \longrightarrow X$$

funciones continuas.




**Topology Requires A Twisted Imag...** *by wordsunwords* ***Zazzle***


I TOPOLOGY

# ¿Qué propiedades se estudian en Topología?

# Propiedades topológicas

Son aquellas que no cambian bajo deformaciones continuas

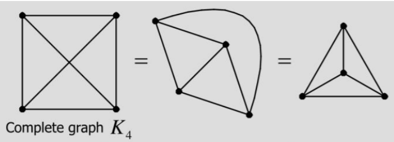
# Propiedades topológicas

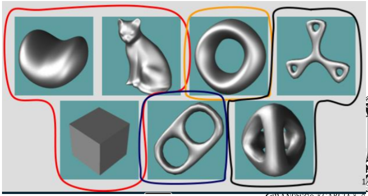
Son aquellas que no cambian bajo deformaciones continuas; en particular, si $X \cong Y$ entonces tienen las mismas propiedades.

# Propiedades topológicas

Son aquellas que no cambian bajo deformaciones continuas; en particular, si $X \cong Y$ entonces tienen las mismas propiedades.

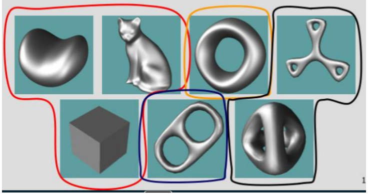
Ejemplos: el número de partes (**conexidad/conectividad**), tener orillas, ser *abierto*, ser cerrado y acotado (**compacto**), número de "hoyos", etc.



**Consecuencia importante:**
si $X$ tiene cierta propiedad topológica pero $Y$ no entonces $X \ncong Y$.

De esto se obtiene que la topología nos permite **clasificar objetos**, una tarea de suma importancia dentro de las matemáticas!



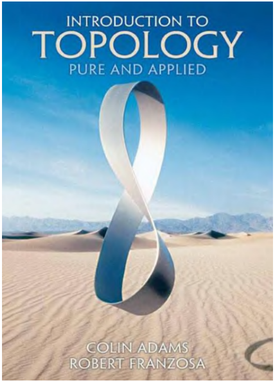
# ¿En dónde estudiar Topología?

# Referencias

- **Petit,J.P., El topologicon**.
  Cómic de divulgación.
- **Illanes, A., La caprichosa forma de globión**.
  Libro de divulgación.
- **Atanosov, A., Topology and Continuity**.
  Pequeño texto introductorio al área.
- **Weeks, J., The Shape of Space**.
  Libro sobre Topología y Geometría.
- En YouTube:
  - Canal **Derivando**, *Cuántos agujeros tiene un pantalón?*, *La conjetura de Poincaré*, ...
  - Canal **3Blue1Brown**, *A quién le importa la Topología?*, ...
- **Munkres, J., Topology, a first course**.
  Referencia clásica para un primer curso

# Referencia principal del curso

Adams, C., Franzosa, R., **Introduction to Topology, Pure and Applied**, Pearson Prentice Hall, 2008.



# Referencia principal

Capítulos:

1. Espacios topológicos
2. Interior, cerradura, frontera
3. Creando nuevos espacios topológicos
4. Funciones continuas y homeomorfismos
5. Espacios métricos
6. Conexidad
7. Compacidad