

Introducción a la teoría de homotopía

Escuela de Otoño 2022

Miguel A. Maldonado

UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS, UAZ.
Email address: mmaldonado@uaz.edu.mx

Contenido

Capítulo 1. Día #1	5
1. Homotopía	5
2. El grupo de Poincaré $\pi_1(X, x_0)$	11
3. Grupo fundamental de S^1	17
4. Primera versión del Teorema de Seifert-van Kampen	18
Capítulo 2. Día # 2	21
1. El Teorema de Seifert-van Kampen	21
2. Espacios celulares	22
3. Variedades topológicas	27
4. Representación plana de superficies	28
5. Seifert-van Kampen y espacios celulares	32
6. Clasificación de superficies	33
Capítulo 3. Apéndices	37
1. Topología	37
2. Abelianización	40
3. Aplicaciones de $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$	41
Referencias	47
Referencias	47

CAPÍTULO 1

Día #1

1. Homotopía

Decimos que dos funciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$ son *homotópicas* si existe una función continua

$$H : X \times I \longrightarrow Y$$

tal que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$, $\forall x \in X$. La función H es llamada una *homotopía* entre f y g y se usa la notación $f \simeq_H g$ para designar a dos funciones homotópicas ó simplemente $f \simeq g$ si la homotopía se sobreentiende o no hay necesidad de mostrarla.

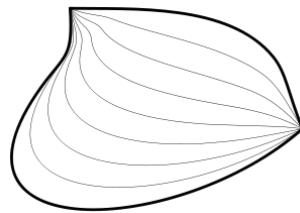


FIGURE 1. Una homotopía como deformación entre dos funciones



Notemos que para cada $t \in I$, la homotopía H determina una función continua $H_t : X \rightarrow Y$, donde $H_t(x) = H(x,t)$. De aquí se obtiene que la relación de homotopía \simeq corresponde a la idea de una deformación continua de la función f en la función g a través de la familia de funciones $\{H_t(x)\}_{t \in I}$.


EJEMPLO 1.1. Sean $X = \{*\}$, $f, g : X \rightarrow Y$ continuas. Dado que las imágenes de f, g son puntos $x, y \in Y$, una homotopía H entre tales funciones tiene la forma

$$H : X \times I \longrightarrow Y, \quad H(*,0) = x, \quad H(*,1) = y$$

Dado que $X \times I \cong I$ la homotopía es una función continua $H : I \rightarrow Y$ con $H(0) = x$, $H(1) = y$; es decir, la homotopía H es básicamente un *camino continuo* entre x, y . ◀

El ejemplo anterior puede ser generalizado mostrando la relación que existe entre una homotopía y las componentes arco-conexas del espacio.

LEMA 1.2. *Dos funciones constantes $f, g : X \rightarrow Y$, $f(x) = y_1, g(x) = y_2$ son homotópicas $\Leftrightarrow y_1, y_2$ pertenecen a la misma componente arco-conexa de Y .*


 Si las imágenes de f, g están contenidas en componentes arco-conexas distintas entonces **no pueden ser homotópicas**. Estos resultados muestran que la propiedad de ser arco-conexo puede ponerse en términos homotópicos.

En diversas situaciones es pertinente que la homotopía deje cierto subespacio invariante: decimos que $f, g : X \rightarrow Y$ tales que $f = g$ en $A \subseteq X$, son **homotópicas relativas a A** si $f \simeq_H g$ y además

$$H(a, t) = f(a) = g(a), \forall a \in A, \forall t \in [0, 1]$$

Notación: $f \simeq g \text{ rel } A$.

TEOREMA 1.3. $\simeq \text{ rel } A$ es una relación de equivalencia en el espacio $C(X, Y; \text{rel } A)$ de funciones continuas de $X \rightarrow Y$ que coinciden en $A \subseteq X$.

 Cuando $A = \emptyset$ denotamos por $[X, Y]$ al cociente de $C(X, Y)$ por la relación de homotopía. Así, dada $f \in C(X, Y)$ su clase de equivalencia está dada por

$$[f] = \{g : X \rightarrow Y \mid g \simeq f\}$$

Dos espacios X, Y se dicen del **mismo tipo de homotopía** si existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ tales que

$$\begin{cases} f \circ g \simeq 1_Y \\ g \circ f \simeq 1_X \end{cases}$$


Notación: $X \simeq Y$. Bajo estas circunstancias las funciones f, g son llamadas **equivalencias homotópicas** y también se dice que una es **inversa homotópica** de la otra.

TEOREMA 1.4. *La propiedad de tener el mismo tipo de homotopía es una relación de equivalencia.*

Dem. Dado que $1_X \simeq 1_X$ claramente se tiene que $X \simeq X$. Además, si $X \simeq Y$ se sigue que $Y \simeq X$ debido a la simetría en la definición anterior.

Supongamos existen funciones $X \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{matrix} Y$, $Y \begin{matrix} \xrightarrow{h} \\ \xleftarrow{l} \end{matrix} Z$ tales que $X \simeq Y$ y $Y \simeq Z$. Consideremos las composiciones y notemos que

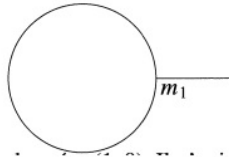
$$\begin{aligned} (g \circ l) \circ (h \circ f) &\simeq g \circ (l \circ h) \circ f \simeq g \circ f \simeq 1_X \\ (h \circ f) \circ (g \circ l) &\simeq h \circ (f \circ g) \circ l \simeq h \circ l \simeq 1_Y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

 Dado que tener una inversa continua es una relación más fuerte que tener una inversa homotópica, cualesquiera espacios homeomorfos tienen el mismo tipo de homotopía:

$$(X \cong Y) \implies (X \simeq Y)$$

El recíproco de la implicación anterior no es cierto:

EJEMPLO 1.5. Sean $X = S^1$ circunferencia unitaria en \mathbb{R}^2 y $Y = S^1 \cup ([1, 2] \times \{0\})$ como en la figura abajo.



Aquí X, Y no son homeomorfos pero $X \simeq Y$. \blacksquare

EJEMPLO 1.6. Consideremos $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ inclusión y la función

$$g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1, \quad g(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

Notemos que $g \circ i = 1_{S^1}$, $i \circ g \simeq_H 1_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$, donde

$$H : (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (x, t) \mapsto tx + (1-t) \frac{x}{\|x\|}.$$

de donde $S^1 \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. \blacktriangleleft



El argumento anterior aplica de manera exacta en el caso de la esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, por lo que se tiene que $S^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. El *segmento dirigido* determinado por x, y es el conjunto de puntos dados por

$$l_{x,y} = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

Un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es llamado *convexo* si para cualesquiera par de puntos $x, y \in C$ el segmento $l_{x,y}$ esta completamente contenido en C .

TEOREMA 1.7. Sean X, Y espacios topológicos con $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo. Cualesquiera funciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homotópicas.

Dem. Consideremos la función

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y, \quad H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$$

Notemos que H es función continua y además $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, por lo que define una homotopia entre f y g . ■

La homotopía definida arriba se llama *homotopía de líneas* y es de gran importancia para estudiar las propiedades homotópicas de subconjuntos de espacios euclidianos.

Un espacio X se llama *contráctil* si la función identidad 1_X es homotópica a una función constante.

COROLARIO 1.8. Todo convexo de \mathbb{R}^n es contráctil.

Dem. Se sigue del resultado anterior: la homotopia entre la identidad y la función constante en $x_0 \in C$ es:

$$H : C \times I \longrightarrow C, \quad H(x, t) = (1-t)x_0 + tx. \quad \blacksquare$$

Así, para $n \geq 1$, la bola o disco unitario D^n , el producto $I^n = I \times \cdots \times I$ (el *cubo* canónico en \mathbb{R}^n) y \mathbb{R}^n mismo, son espacios contráctiles por ser convexos. En particular, cualesquiera funciones continuas con contradominio en estos espacios son homotópicas (Teorema 1.7). Más aún, la inclusión $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ es homotópica a una función constante.



Recordemos que los espacios $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ son contráctiles; en particular, esto dice que son del mismo tipo de homotopía. Por otro lado, es un resultado clásico (más no trivial) que si $n \neq m$ entonces $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ no son homeomorfos. Este resultado requiere maquinaria del tipo *homológica* por lo que su prueba no se dará en las presentes notas. Sin embargo, el caso $m = 2$ es probado en el Teorema 3.21 como una aplicación del grupo fundamental.

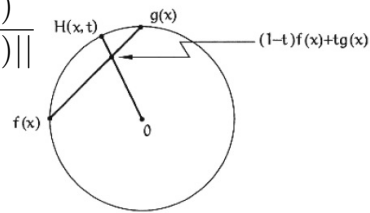
Una aplicación sobre homotopía de líneas:

TEOREMA 1.9. Sean $f, g : X \rightarrow S^n$ funciones continuas tales que $f(x) \neq -g(x), \forall x \in X$, entonces $f \simeq g$.

Dem. La hipótesis implica que $(1 - t)f(x) + tg(x) \neq 0, \forall t \in [0, 1], \forall x \in X$. Por lo que definimos $H : X \times [0, 1] \rightarrow S^n$ como

$$H(x, t) = \frac{(1 - t)f(x) + tg(x)}{\|(1 - t)f(x) + tg(x)\|}$$

Observemos que mientras t varia, $H(x, t)$ describe el arco más corto de la circunferencia que conecta a $f(x)$ con $g(x)$; véase la imagen abajo. ■



Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es un *retracto* de X si existe función continua $r : X \rightarrow A$ tal que $r|_A = 1_A$; esto es, A es retracto si $r \circ i = 1_A$, donde $i : A \rightarrow X$ es inclusión. La función r es llamada una *retracción* y representa una deformación de X en A .

EJEMPLO 1.10. Los siguientes ejemplos muestran que las retracciones existen:

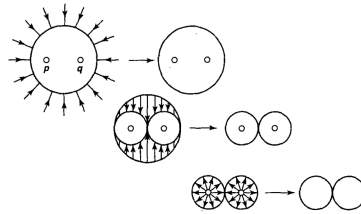
- (1) Sean X espacio topológico y $x_0 \in X$. Observemos que la función constante $X \rightarrow \{x_0\}$ es una retracción
- (2) La función $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ dada por $x \mapsto x/|x|$ es un retracción. ◀



Un espacio y cualquiera de sus retractos comparten ciertas propiedades topológicas; esto permite, en particular, detectar posibles retractos de un espacio: por ejemplo, si X es conexo (resp. compacto) y A no conexo (resp. no compacto) se tiene que A no puede ser retracto de X .

Decimos que $A \subseteq X$ es un *retracto por deformación* de X si existe una retracción r tal que $i \circ r \simeq 1_X$; es decir, que la retracción y la inclusión son equivalencias homotópicas y por tanto $X \simeq A$.

EJEMPLO 1.11. El *plano punchado dos veces* $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$ tiene a la *figura del ocho* como retracto por deformación como se muestra en la siguiente figura



La imagen usada ha sido tomada (sin permiso) del libro [40]. ◀

TEOREMA 1.12. X es contráctil $\Leftrightarrow \exists x_0$ tal que $\{x_0\}$ es un retracto por deformación de X .

Dem. \Rightarrow Sea $x_0 \in X$ y supongamos $1_X \simeq c_{x_0}$. Notemos que $c_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\}$ es retracción pues $c_{x_0} \circ i = 1_{\{x_0\}}$, con $i : \{x_0\} \rightarrow X$ inclusión. Además, por hipótesis, $c_{x_0} = i \circ c_{x_0} \simeq 1_X$; luego $\{x_0\}$ es retracto por deformación.

\Leftarrow Supongamos que existe $r : X \rightarrow \{x_0\}$ tal que

$$r \circ i = 1_{\{x_0\}}, \quad i \circ r \simeq 1_X$$

Notemos que r es función constante y además $r \simeq 1_X$. ■

Bajo estas condiciones se tiene que $X \simeq \{x_0\}$.

PROPOSICIÓN 1.13. Todo espacio contráctil es arco-conexo

⚡ Por una generalización del Ejemplo 1.6 se tiene que S^n es un retracto por deformación de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$.

LEMA 1.14. Si X es contráctil, $X \times Y \simeq Y$. Si ambos son contráctiles, el producto también lo es.

Dem. Sea $p \in X$ y supongamos $1_X \simeq_H c_p$, con $c_p : X \rightarrow \{p\}$. Entonces la funciones

$$\begin{cases} f : X \times Y \longrightarrow Y, & f(x, y) = y, \\ g : Y \longrightarrow X \times Y, & g(y) = (p, y) \end{cases}$$

son equivalencias homotópicas pues $f \circ g = 1_Y$ y además la función $G(x, y, t) = (H(x, t), y)$ define una homotopía entre $1_{X \times Y}$ y $g \circ f : X \times Y \rightarrow X \times Y$. ■

2. El grupo de Poincaré $\pi_1(X, x_0)$

Un *camino* α de x_0 a x_1 es una función continua $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1$, llamados el punto *inicial* y *final*. Un *lazo* basado en $x_0 \in X$ es un camino con punto inicial y final x_0 .

Sean α, β caminos tales que $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Decimos que α, β son *homotópicos (con extremos fijos)* si $\alpha \simeq \beta \text{ rel}\{0, 1\}$. En otras palabras, existe $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que

$$\begin{cases} H(s, 0) = \alpha(t), & H(s, 1) = \beta(s) \\ H(0, t) = x_0, & H(1, t) = x_1 \end{cases}$$

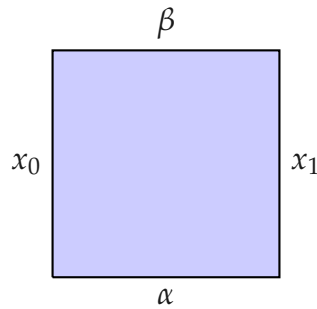


FIGURE 2. Representación gráfica de un homotopía de caminos

Del Teorema 1.3 se tiene que la relación $\alpha \simeq \beta$ es una relación de equivalencia. La clase de equivalencia se denota por $[\alpha]$; así


$$[\alpha] = \{\beta : [0, 1] \rightarrow X \mid \beta \simeq \alpha\}$$

A continuación algunas construcciones de gran importancia para la teoría que se va a desarrollar:

- El *camino constante* en $x \in X$ se define como $c_x(t) = x$ para todo $t \in [0, 1]$.

- Dado un camino α se define su **camino inverso** $\bar{\alpha}$ como el camino de x_1 a x_0 dado por $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$.
- Si β es camino tal que $\alpha(1) = \beta(0)$ definimos el **camino producto** $\alpha * \beta$ como el camino dado por


$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

 Observemos que $\alpha * \beta$ es función continua (por el Lema del Pegado, [32]) y es un camino de $\alpha(0)$ a $\beta(1)$ que consiste en recorrer a α y β al doble de velocidad.

TEOREMA 1.15. Sea X espacio topológico.

- (1) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ caminos en X .
 - (a) Si $\alpha_1 \simeq \alpha_2$ entonces $\bar{\alpha}_1 \simeq \bar{\alpha}_2$
 - (b) Si $\alpha_1 \simeq \alpha_2, \beta_1 \simeq \beta_2$, entonces $\alpha_1 * \beta_1 \simeq \alpha_2 * \beta_2$
- (2) Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ caminos en X . Entonces

$$(\alpha_1 * \alpha_2) * \alpha_3 \simeq \alpha_1 * (\alpha_2 * \alpha_3)$$
- (3) Para α camino entre x, y se tiene
 - (a) $c_x * \alpha \simeq \alpha, \alpha \simeq \alpha * c_y$
 - (b) $\alpha * \bar{\alpha} \simeq c_x, \bar{\alpha} * \alpha \simeq c_y$

 Debido al inciso (3) del teorema anterior, estudiar caminos continuos en espacios topológicos es, desde un punto de vista homotopico, trivial.

Dado $x_0 \in X$ consideramos al **espacio de lazos basados** en x_0 :

$$\Omega(X, x_0) = \{\lambda \in \text{Map}([0, 1], X) \mid \lambda(0) = \lambda(1) = x_0\}$$

Denotamos por $\pi_1(X, x_0)$ al cociente de $\Omega(X, x_0)$ por la relación de homotopia de lazos:

$$\pi_1(X, x_0) = \{[\alpha] \mid \alpha \in \Omega(X, x_0)\}$$

Por el Teorema 1.15 anterior se tiene una estructura de grupo en $\pi_1(X, x_0)$:

- Elemento identidad: $e = [c_{x_0}]$
- Inverso: $[\alpha]^{-1} := [\bar{\alpha}]$
- Producto: $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$

El grupo $\pi_1(X, x_0)$ es llamado el **grupo fundamental** de X basado en x_0 .

Resulta natural preguntarse acerca de la dependencia del punto base: sea y otro punto distinguido y γ camino entre ellos. Observemos que γ induce un homomorfismo de *traslación*:

$$\gamma_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(X, y), \quad [\alpha] \mapsto [\gamma]^{-1}[\alpha][\gamma] = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$$

TEOREMA 1.16. Si X es conexo por arcos, γ_* es un isomorfismo para todo par $(x, y) \in X \times X$.

Dem. Sea $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Notemos que $\gamma_*([\alpha] * [\beta]) = \gamma_*([\alpha * \beta])$ y además

$$\begin{aligned} \gamma_*([\alpha * \beta]) &= [\gamma^{-1} * (\alpha * \beta) * \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma * \gamma^{-1} * \beta * \gamma] \\ &= [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma] * [\gamma^{-1} * \beta * \gamma] \\ &= \gamma_*([\alpha]) * \gamma_*([\beta]) \end{aligned}$$

asi, γ_* es homomorfismo. Notemos que el homomorfismo

$$\gamma_*^{-1} : \pi_1(X, y) \longrightarrow \pi_1(X, x), \quad [\alpha] \mapsto [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$$

es el homomorfismo inverso de γ_* . ■



Una observación importante: el grupo fundamental también es posible que se defina a través de clases de homotopía de funciones continuas $S^1 \rightarrow X$; la equivalencia entre esta definición y la anterior radica en la biyección

$$\{\alpha : I \rightarrow X \mid \alpha \text{ continua, } \alpha(0) = \alpha(1)\} \leftrightarrow \{S^1 \rightarrow X \mid \text{continua}\}$$

Consideremos una función $f : X \rightarrow Y$ con $y_0 = f(x_0)$, para un punto distinguido $x_0 \in X$. Definamos

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

Por el Teorema 1.15 se tiene que

$$\begin{aligned}
 f_*([\lambda] * [\eta]) &= f_*([\lambda * \eta]) \\
 &= [f \circ (\lambda * \eta)] \\
 &= [(f \circ \lambda) * (f \circ \eta)] \\
 &= [f \circ \lambda] * [f \circ \eta] \\
 &= f_*([\lambda]) * f_*([\eta])
 \end{aligned}$$

Es decir, f_* es un homomorfismo de grupos y es llamado el **homomorfismo inducido** por f . Sean $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ y notemos que

$$g_* \circ f_*([\alpha]) = g_*([f \circ \alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = (g \circ f)_*([\alpha])$$

En otros terminos: $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

LEMA 1.17. Si g es función tal que $g \simeq f$ con $g(x_0) = f(x_0)$, entonces $f_* = g_*$.

Dem. Sólo basta recordar que, bajo las hipótesis del lema, $f \circ \alpha \simeq g \circ \alpha, \forall \alpha \in \pi_1(X, x_0)$. ■

TEOREMA 1.18. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios con punto base. Entonces se tiene un isomorfismo

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

éste último dado por el producto directo de los grupos.

TEOREMA 1.19. El grupo fundamental es un invariante topológico de X .



Es de observarse que aunque dos espacios tengan grupos fundamentales isomorfos, no implica que los espacios sean homeomorfos; ver Corolario 1.29. Pero, por otro lado, si dos espacios no tienen grupos fundamentales isomorfos, entonces no pueden ser homeomorfos. Esto hace del grupo fundamental una útil herramienta para mostrar que dos espacios no son homeomorfos, lo cual puede ser una tarea tediosa.

TEOREMA 1.20. Si $f : X \rightarrow Y$ es equivalencia homotópica, entonces el homomorfismo

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

es isomorfismo.

Dem. A diferencia del Lema 1.17, donde se tiene que las imágenes del punto base coinciden, en el teorema de arriba no se tiene ningún control sobre el punto base (no se tiene desde la definición de equivalencia homotópica). Es por esto que necesitamos el siguiente resultado:

- Sean $f \simeq g : X \rightarrow Y$. Para todo $x \in X$ existe un isomorfismo de grupos χ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x)) \\ & \searrow g_* & \uparrow \chi \\ & & \pi_1(Y, g(x)) \end{array}$$

cuya prueba se encuentra en [14] ■

Dem. de Teorema 1.20. Sea f equivalencia homotópica con inversa g y apliquemos el resultado anterior para $g \circ f, 1_X$:

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{g \circ f} & \pi_1(X, (g \circ f)(x)) \\ \pi_1(X, x) & \nearrow & \uparrow \cong \chi \\ & \searrow 1_X & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Como χ es isomorfismo, también lo es $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. De aquí que f_* es inyectiva y g_* sobreyectiva; de igual forma, usando $f \circ g$ se tiene que g_* es inyectiva y f_* sobre. ■

COROLARIO 1.21. El grupo fundamental de un espacio contráctil es trivial.

LEMA 1.22. Dadas una retracción $r : X \rightarrow A$ y la inclusión $i : A \rightarrow X$ pruebe que el homomorfismo inducido r_* es sobreyectivo e i_* es inyectivo.

Dem. Notemos que $r \circ i : A \rightarrow X \rightarrow A$ es el mapeo identidad, así que

$$r_* \circ i_* : \pi_1(A) \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(A)$$

es el homomorfismo identidad en $\pi_1(A)$. Si $i_*([\lambda]) = i_*([\lambda'])$ entonces $[\lambda] = r_* \circ i_*([\lambda]) = r_* \circ i_*([\lambda']) = [\lambda']$; así, i_* es inyectivo. Finalmente notemos que dada $[\lambda] \in \pi_1(A)$ se tiene que $r_*(i_*([\lambda])) = [\lambda]$; luego, r_* es sobreyectivo. ■

TEOREMA 1.23 (Borsuk, 1933). Sea A un retracto por deformación de X . Entonces la inclusión $i : A \subset X$ induce el isomorfismo $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$.

Dem. Por hipótesis existe homotopia H tal que $i \circ r \simeq_H 1_X$. Se sigue entonces que

$$1_{\pi_1 X} = i_* \circ r_* : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, a).$$

Además, por el Lema 1.22 anterior sabemos que i_* es inyectiva; mas aún, i_* es sobreyectiva porque dada $[\lambda] \in \pi_1(X, a)$ se tiene que $i_*(r_*([\lambda])) = [\lambda]$. ■

Como consecuencia del resultado anterior se tiene:

LEMA 1.24. Sean $A \subset X$ y $a \in A$. Si $\pi_1(A, a)$ es no trivial y $\pi_1(X, a)$ es trivial, entonces no existe retracción de X en A .

EJEMPLO 1.25. Recordemos que la banda de Mobius M se construye a través del pegado de dos lados del cuadro $[0, 1] \times [0, 1]$. Consideremos el subespacio de $[0, 1] \times [0, 1]$ dado por

$$C = [0, 1] \times \{1/2\}$$

y notemos que después de la identificación $C \cong S^1$. Definamos $r : M \rightarrow C$ como la proyección en tal círculo: $r(t, s) = (t, 1/2)$. Observemos que r es una retracción por lo que tenemos $\pi_1(M) \cong \pi_1(C) \cong \pi_1(S^1)$, lo cual calcularemos en Sección 3. ◀

Decimos que un espacio es *simplemente conexo* si es arco-conexo y si $\pi_1 X = \{1\}$. Por las propiedades de los homomorfismos inducidos es inmediato notar que la propiedad de ser simplemente conexo es una propiedad topológica.

EJEMPLO 1.26. Como todo espacio contráctil es arco-conexo (Corolario 1.13) y además tiene grupo fundamental trivial (Corolario 1.21) se sigue que todo espacio contráctil es simplemente conexo. ◀

En particular, $\pi_1 \mathbb{R}^n = \pi_1 D^n = \pi_1 \{*\} = \{1\}$.

3. Grupo fundamental de S^1

Por el siguiente resultado se tiene que S^1 no es contráctil; en particular, no tiene el mismo tipo de homotopía que \mathbb{R}^2 ó D^2 .

TEOREMA 1.27. *El grupo fundamental del círculo es isomorfo al grupo \mathbb{Z} .*

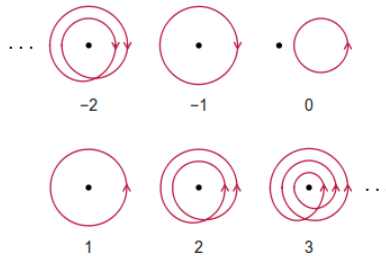


FIGURE 3. Todo lazo en S^1 determina un entero, llamado el **grado** del lazo.

La prueba consiste de varios pasos:

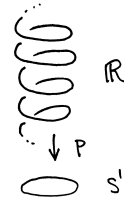
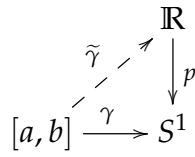
- Se define una función

$$\text{deg} : \pi_1(S^1, (1,0)) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad [\alpha] \mapsto \text{deg}(\alpha)$$

Para ver que está bien definida y es un homomorfismo de grupos se usan propiedades de la función exponencial

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1, \quad t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = e^{2i\pi t},$$

la cual "desenrolla" cada lazo en S^1 como en el diagrama de abajo



Aquí la función $\tilde{\gamma}$ es llamada un *levantamiento* de γ respecto a la función exponencial.

En alguna parte de la demostración se prueba que $\gamma \simeq_H \gamma' \Leftrightarrow \text{deg}(\gamma) = \text{deg}(\gamma')$. Más aún, γ es camino constante $\Leftrightarrow \text{deg}(\gamma) = 0$.

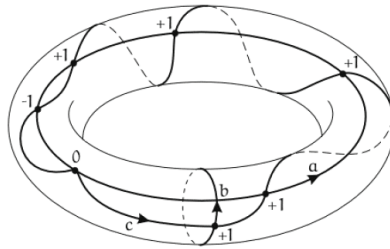
• Finalmente, para mostrar que deg es sobreyectiva, dado $n \in \mathbb{Z}$, se considera el camino

$$\alpha_n(t) = e^{2i\pi nt}$$

que tiene por levantamiento $\tilde{\alpha}(t) = nt$, por lo que $\text{deg}(\alpha_n) = n$. ■

⚠ Sean γ lazo basado en S^1 con inversa $\bar{\gamma}$. Por la prueba anterior, de la relación $\gamma * \bar{\gamma} \simeq C_m$, se tiene que $\text{deg}(\gamma) + \text{deg}(\bar{\gamma}) = 0$; es decir, $-\text{deg}(\gamma) = \text{deg}(\bar{\gamma})$.

COROLARIO 1.28. El grupo fundamental del toro $T^2 = S^1 \times S^1$ es abeliano libre en dos generadores.



COROLARIO 1.29. El grupo fundamental del cilindro $C = S^1 \times I$ es cíclico infinito: $\pi_1 C \cong \mathbb{Z}$.

4. Primera versión del Teorema de Seifert-van Kampen

En esta sección mostraremos que es posible distinguir a la circunferencia S^1 de las otras esferas S^n mediante el cálculo de su grupo fundamental

TEOREMA 1.30. *Sea $X = U \cup V$, con U, V subespacios abiertos, simplemente conexos con $U \cap V$ arco-conexo. Entonces X es simplemente conexo.*

COROLARIO 1.31. *La esfera S^n es simplemente conexa, para $n \geq 2$; es decir, $\pi_1 S^n = \{1\}, \forall n \geq 2$.*

Dem. Consideremos a $S^n = U \cup V$, donde

$$U = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_n > -1/4\}, \quad V = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \mid x_n < 1/4\}$$

y notemos que U, V son simplemente conexos pues son homeomorfos a discos abiertos; además $U \cap V = S^{n-1} \times (-1/4, 1/4) \cong S^{n-1}$, que es arco-conexo para $n \geq 2$; el resultado se sigue del teorema anterior. ■

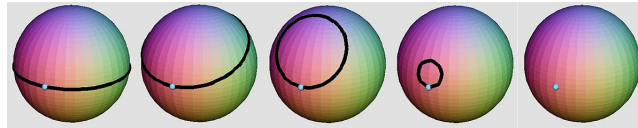


FIGURE 4. Otra prueba de que S^2 es simplemente conexa

⚠ Observemos que la condición $n \geq 2$ es importante pues si $n = 1$ entonces $U \cap V \cong S^0$ no es arco-conexo.

COROLARIO 1.32. *El grupo $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es trivial para $n \geq 3$.*

CAPÍTULO 2

Día # 2

1. El Teorema de Seifert-van Kampen

Sea $X = U \cup V$, con U, V abiertos y $U, V, U \cap V$ arco-conexos. Tenemos inclusiones y sus respectivos homomorfismos inducidos:

$$\begin{cases} i_U : U \cap V \rightarrow U, & \pi_1(i_U) : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(U) \\ i_V : U \cap V \rightarrow V, & \pi_1(i_V) : \pi_1(U \cap V) \rightarrow \pi_1(V) \\ j_U : U \rightarrow X, & \pi_1(j_U) : \pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X) \\ j_V : V \rightarrow X, & \pi_1(j_V) : \pi_1(V) \rightarrow \pi_1(X) \end{cases}$$

Los homomorfismos forman el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \pi_1(X) \end{array}$$

(A dashed arrow labeled Φ points from $\pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$ to $\pi_1(X)$. A curved arrow also points from $\pi_1(U)$ to $\pi_1(X)$.)

TEOREMA 2.1 (Seifert-van Kampen (1932)). *El homomorfismo Φ es un isomorfismo; es decir*

$$\pi_1 X \cong \pi_1(U) *_{\pi_1(U \cap V)} \pi_1(V)$$

El siguiente resultado se obtiene al recordar que el producto libre es un caso particular del producto amalgamado.

COROLARIO 2.2. *Si en las condiciones de arriba se tiene además que $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1 X \cong \pi_1 U * \pi_1 V$.*

Un *espacio punteado* (X, x_0) es un espacio X con la elección de un punto $x_0 \in X$. Una función continua entre espacios punteados $(X, x_0), (Y, y_0)$ es una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Decimos que (X, x_0) está *bien punteado* si x_0 admite una vecindad abierta V tal que $\{x_0\}$ es un retracto por deformación de V .

TEOREMA 2.3. Si $(X, x_0), (Y, y_0)$ son espacios arco-conexos, correctamente punteados, entonces

$$\pi_1(X \vee Y) \cong \pi_1(X) * \pi_1(Y)$$

EJEMPLO 2.4. En general, dado C_n el wedge de n copias de la circunferencia S^1

$$\pi_1 C_n = \star_n \mathbb{Z} = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$$

donde cada t_i es el generador del grupo fundamental $\pi_1 S^1$ de la i -ésima copia de S^1 . ◀

2. Espacios celulares

Sean $f : A \rightarrow X, f' : A \rightarrow X'$ funciones continuas. Dada la unión $X \sqcup X'$ consideremos la relación

$$(X \sqcup X') / \sim, \text{ donde } f(a) \sim f'(a)$$

Denotamos a este cociente mediante $X \cup_A X' = (X \sqcup X') / \sim$ y lo llamaremos *espacio de adjunción*.



A pesar de que no es evidente en la notación, la construcción anterior también depende de la función f .

Consideremos las funciones

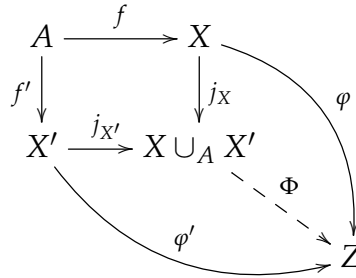
$$j_X : X \rightarrow X \sqcup X' \rightarrow X \cup_A X'$$

$$j_{X'} : X \rightarrow X \sqcup X' \rightarrow X \cup_A X'$$

y notemos que $j_X \circ f = j_{X'} \circ f'$.

El espacio de adjunción satisface la siguiente propiedad universal: dadas φ, φ' tales que $\varphi \circ f = \varphi' \circ f'$, existe una única función Φ tal que

$$\Phi \circ j_X = \varphi, \Phi \circ j_{X'} = \varphi'.$$



En otras palabras $X \cup_A X'$ es *pushout* de f, f' ; véase [8, Sec.4.5].

EJEMPLO 2.5. La **suma wedge** (ó *ramillete*) $X \vee X'$ de dos espacios se construye escogiendo dos punto distinguidos $x \in X, x' \in X'$ y usando las funciones

$$f : \{*\} \mapsto X, \quad f' : \{*\} \mapsto X'$$

que envían a $*$ a los punto x, x' , respectivamente. Denotamos

$$X \vee X' = X \cup_* X'$$

La construcción puede ser generalizada a una cantidad arbitraria de espacios con puntos distinguidos de manera inductiva: $\bigvee_i X_i$. ◀

La **adjunción de una n -celda** a través de una función $f : S^{n-1} \rightarrow X$ corresponde al caso en que $f' = i$ es la inclusión $S^{n-1} \rightarrow D^n$.

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & X \cup_{S^{n-1}} D^n \end{array}$$

Es común usar la notación

$$X \cup_f e^n = X \cup_{S^{n-1}} D^n,$$

donde e^n es la imagen (homeomorfa) de D^n , llamada la **n -celda adjuntada**. f es llamada la **función de adjunción** o de pegado.

⚠ Notemos que si la función de pegado $f : S^{n-1} \rightarrow X$ es constante recobramos la suma wedge $X \cup_f e^n \cong X \vee S^n$.

⚡ En general, una colección $\{f_i : S_i^{n-1} \rightarrow X\}_{i \geq 1}$ de funciones continuas induce una función $f : \sqcup_i S_i^{n-1} \rightarrow X$. Con la inclusión $\sqcup_i S_i^{n-1} \subseteq \sqcup_i D_i^n$ se tiene la construcción

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_i S_i^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 \bigsqcup_i D_i^n & \longrightarrow & X \cup_f \bigsqcup_i e_i^n
 \end{array}$$

Un *espacio celular (finito)* es un espacio Hausdorff X equipado de una colección de subespacios (llamados **esqueletos**)

$$(2.1) \quad X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^{n+1} \subseteq \dots \subseteq X$$

que se construyen de manera inductiva:

$$X^n = X^{n-1} \cup_f \bigsqcup_{i \in I} e_i^n = ((X \cup_{f_1} e_1^n) \cup_{f_2} e_2^n) \cup_{f_3} e_3^n \dots \cup_{f_l} e_l^n$$

donde I es conjunto finito y f es la función inducida como arriba.

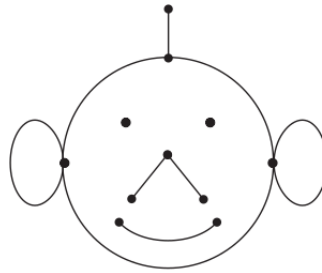


FIGURE 1. Ejemplo de un esqueleto de dimensión 1

⚠ En general la estructura de espacio celular no es única:

EJEMPLO 2.6. La suma wedge de n espacios homeomorfos a S^1 tiene una estructura celular dada por una 0-celda a la que se le adjuntan n 1-celdas. ◀

EJEMPLO 2.7. Sea P polígono con $2n$ lados. Tomamos el espacio cociente $S = P / \sim$, donde $x \sim x$, para $x \in \text{int}(P)$ y en la frontera ∂P hace identificaciones 2 a 2.

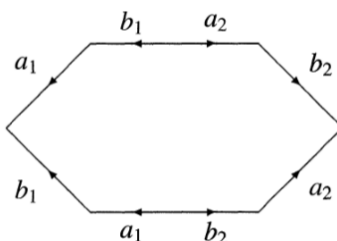


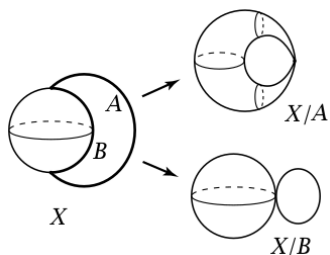
FIGURE 2. Un 6-gono con identificación de sus lados indicadas por flechas y etiquetas

Si todos los vértices se identifican en uno solo, la frontera se transforma en un wedge C_n de n circunferencias. Por otro lado, notemos que al considerar la función $f : S^1 \rightarrow \partial P$ que recorre la frontera una vez en el sentido de las manecillas, el espacio resultante S puede considerarse como un espacio de adjunción $S = C_n \cup_f e^2$. ◀

⚠ Los espacios celulares gozan de propiedades que los hacen interesantes y útiles. En particular, son espacios en donde las homotopías pueden ser extendidas (véase [2, Prop.1.5.13]) y una de las principales consecuencias es la siguiente

COROLARIO 2.8. Si la construcción $Y = X \cup_f e^n$ se realiza a partir de un espacio contráctil X entonces la proyección $Y \rightarrow Y/X$ es una equivalencia homotópica.

EJEMPLO 2.9. Consideremos el espacio X dado por la esfera S^2 con dos aristas A, B como se muestra en la figura de abajo.



Estructura celular X : los polos son 0-celdas; los interiores de A, B como 1-celdas y la esfera S^2 como una 2-celda. Dado que A, B son contráctiles $X/A \simeq X/B \simeq X$, donde $X/A \cong S^2/S^0$ y el segundo es $S^1 \vee S^2$. ◀

Otra consecuencia importante: la adjunción de celdas es una operación homotópica

TEOREMA 2.10. Sean $f, g : S^{n-1} \rightarrow X$ dos funciones homotópicas. Entonces los espacios $X \cup_f e^n \simeq X \cup_g e^n$.

En particular, si f es homotópica a una función constante, el pegado $X \cup_f e^n$ es homotópicamente el wedge $X \vee S^n$

3. Variedades topológicas

Una n -variedad topológica M es un espacio topológico M que satisface:

- M es Hausdorff
- M es segundo numerable
- M es localmente n -Euclidiano.

En lo que sigue usaremos el término n -variedad para referirnos a una n -variedad topológica.

En muchos textos la segunda condición de la definición es reemplazada por la de ser paracompacto; no usaremos tal equivalencia. De igual manera, las propiedades Hausdorff + segundo numerable puede sustituirse por la existencia de un *encaje* $M \subset \mathbb{R}^N$, para alguna N ; véase [40, Teo36.2].

EJEMPLO 2.11. Varios ejemplos:

- (1) Todo abierto de \mathbb{R}^n es una n -variedad; de igual forma, todo abierto de \mathbb{C}^n es una $2n$ -variedad.
- (2) Dado $x \in S^n$ notemos que x pertenece al abierto $S^n \setminus \{-x\}$, el cual es homeomorfo a \mathbb{R}^n a través de la **proyección estereográfica**¹. Así S^n es localmente euclidiano, el resto de las propiedades se siguen de inmediato.
- (3) El espacio $\mathbb{R}P^n$ es también localmente euclidiano de dim n pues cualquier punto pertenece al complemento $\mathbb{R}P^n \setminus H$, de algún hiperplano H , donde el complemento es un subespacio abierto homeomorfo a \mathbb{R}^n .
- (4) Recordemos que el conjunto de matrices cuadradas $M_n(\mathbb{R})$ con entradas reales se identifica con \mathbb{R}^{n^2} de la siguiente manera

$$(a_{ij}) \longmapsto (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$$

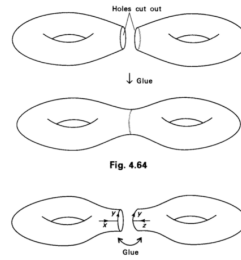
Con esto $M_n(\mathbb{R})$ adquiere una estructura de n^2 -variedad. ◀

¹La cual está dada por $f : S^n \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \frac{1}{1-x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n)$

Una operación importante: sean M_1, M_2 n -variedades (compactas y conexas) y $m_i \in M_i$ así como bolas abiertas $U_i \subset M_i$. Dado un homeomorfismo $h : \partial U_1 \rightarrow \partial U_2$ consideramos los espacios $M'_i = M_i \setminus U_i$ y definimos la **suma conexa** de M_1, M_2 como el cociente

$$M_1 \# M_2 = (M_1 \sqcup M_2) / \sim,$$

donde identificamos cada $q \in \partial U_1$ con la imagen $h(q) \in \partial U_2$.



⚠ Al contrario de lo que parece, la construcción $M \# N$ no depende de la elección de los homeomorfismos φ , los puntos en M, N ni de las bolas abiertas; véase [25] para más información al respecto.

LEMA 2.12. Si M, N son n -variedades conexas, $M \# N$ es también una n -variedad conexa.

Dem. Véase [26], p.126-129. ■

⚠ La operación de suma conexa de variedades define una operación conmutativa y asociativa:

$$M \# N \cong N \# M \quad M \# (N \# P) \cong (M \# N) \# P$$

Notemos que $S^2 = D^2 \# D^2$. Además S^2 funge el papel de "elemento neutro" para la suma conexa:

$$S \# S^2 = S^2 \# S = S,$$

para toda superficie compacta conexa S .

4. Representación plana de superficies

Una **representación plana** de una superficie compacta y conexa S es un polígono con un número par de lados llamados **aristas**, equipado con una identificación a pares tal que el espacio cociente por esa identificación es homeomorfo a S . La identificación de las aristas se denota por una **etiqueta** y una **orientación** de las mismas.

La definición anterior corresponde a un enfoque *combinatorio* de la teoría de superficies iniciado por Dehn y Heegard en 1907.

EJEMPLO 2.13. La esfera S^2 puede considerarse como el cociente de D^2 mediante la identificación de los puntos en su frontera como muestra la figura de abajo.

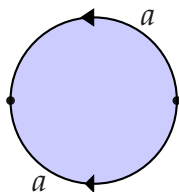


FIGURE 3. Representación plana de S^2

Para codificar esta identificación elegimos un extremo de una arista y recorremos la frontera en un orden dado (el de las manecillas del reloj, por ejemplo); asignaremos un exponente $+1$ a la arista a si la orientación que tiene coincide con la que elegimos para recorrer la frontera; el exponente será -1 en caso contrario. La palabra obtenida es aa^{-1} y la llamaremos la *palabra asociada* a la esfera S^2 . ◀

EJEMPLO 2.14. Recordemos que el toro $T^2 = S^1 \times S^1$ se obtiene del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ identificando el lado inferior con el superior y el izquierdo con el derecho como indica la figura

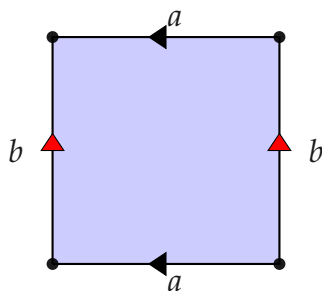


FIGURE 4. Representación plana del toro T^2

Denotando a las aristas de la frontera por a, b como se muestra en la figura y eligiendo la esquina inferior derecha para recorrer la frontera, la identificación para obtener el toro T^2 se denota por $bab^{-1}a^{-1}$. ◀

EJEMPLO 2.15. La *botella de Klein* se obtiene del cuadrado $X = [0, 1] \times [0, 1]$ identificando el lado inferior con el superior y el izquierdo con el derecho. Denotando a los lados del cuadrado X como se muestra en la figura, la identificación se denota mediante $aba^{-1}b$.

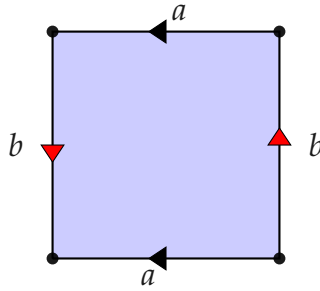
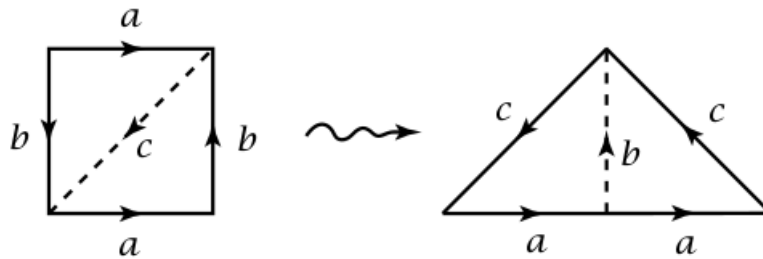


FIGURE 5. Representación plana de la botella de Klein



Otra representación de la botella de Klein



EJEMPLO 2.16. El plano proyectivo real \mathbb{RP}^2 es un espacio compacto y arco-conexo obtenido del disco unitario cerrado como se ilustra en la figura. Aquí la palabra asociada es aa . ◀

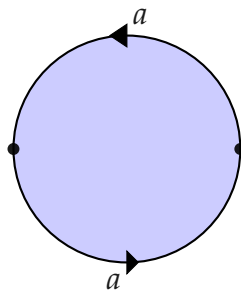
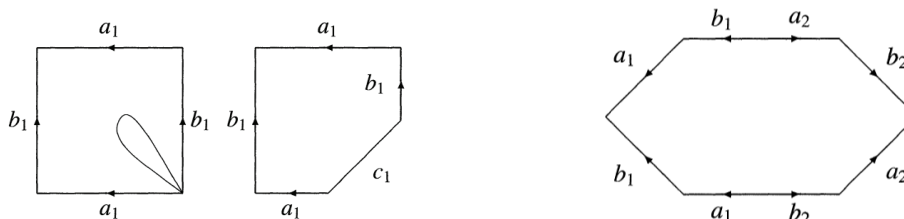


FIGURE 6. Representación plana de \mathbb{RP}^2

Algunas observaciones sobre la asociación $P \mapsto \omega$:

- Si elegimos otro punto base en el procedimiento anterior, la palabra cambia por una *permutación cíclica*.
- Si elegimos la orientación opuesta, la palabra cambia por su **inversa**.

EJEMPLO 2.17. Tomemos el toro T^2 con su representación usual y consideremos $T^2 \# T^2$



Al realizar la suma conexa identificamos los segmentos c_1 de las representaciones. El resultado es el polígono de la parte derecha de la figura con la palabra asociada $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$. ◀

En general, la suma conexa de g copias del toro T^2 es llamada la *superficie orientable de género g* :

$$S_g = T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2$$

La palabra asociada a S_g está dada por

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

De igual forma definimos la *superficie no orientable de género g* como la suma conexa de planos proyectivos:


$$N_g = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$$

La palabra asociada a N_g está dada por

$$a_1^2 a_2^2 \dots a_{g-1}^2 a_g^2$$

Teorema de clasificación de superficies:

TEOREMA 2.18 (Möbius, 1860). *Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a la esfera S^2 , a la superficie S_g , ó a N_g*

 Pregunta importante: ¿cómo sabemos que estas opciones son todas "diferentes"?

5. Seifert-van Kampen y espacios celulares

Consideremos X espacios arco-conexo y $f : (S^{n-1}, p) \rightarrow (X, x_0)$ función entre espacios bien punteados para considerar el pegado de celdas $Y = X \cup_f D^n$.

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ i \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & Y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \pi_1 S^{n-1} & \xrightarrow{f_*} & \pi_1 X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1 U & \longrightarrow & \pi_1 Y \end{array}$$

TEOREMA 2.19. Dada la inclusión $i : X \rightarrow Y$ y la función f tenemos:

(1) Si $n \geq 3$, la función i induce el isomorfismo

$$\pi_1 X \cong \pi_1 Y$$

(2) Si $n = 2$ la función f determina $[f] \in \pi_1 X$ y además

$$\pi_1 Y \cong \pi_1 X / [f]$$

(3) Si $n = 1$ se tiene $\pi_1 Y \cong \pi_1 X * Z$

Dem. Consideremos la descomposición de Y como en el figura

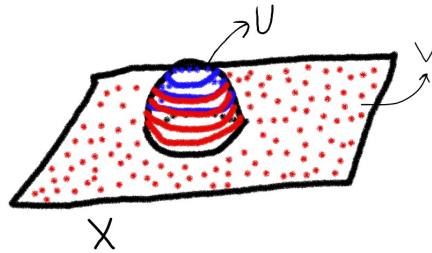


FIGURE 7. Cubierta abierta para Y , con $n = 2$.

Notemos que U es contráctil, la intersección $U \cap V \simeq S^{n-1}$ y además $V \simeq X$. Aplicando el Teorema de Seifert-van Kampen se obtiene

$$\pi_1 Y \cong \pi_1 X *_{\pi_1 S^{n-1}} \pi_1 U$$

(1) Si $n \geq 3$, $\pi_1 S^{n-1} = \pi_1 U$ es trivial; de donde


$$\pi_1 X \cong \pi_1 Y$$

(2) Si $n = 2$, $\pi_1 U$ es trivial y $\pi_1 S^{n-1} = Z = \langle [f] \rangle$; de donde

$$\pi_1 Y = \pi_1 X *_{[f]} e = \pi_1 X / [f]$$

(3) Sea $n = 1$. Como X es arco-conexo, $f : S^0 \rightarrow X$ es homotópicamente constante (en x_0) por lo que $Y \simeq X \vee S^1$; de aquí

$$\pi_1 Y = \pi_1 X * \pi_1 S^1 = \pi_1 X * Z. \quad \blacksquare$$

 Un primer acercamiento a los problemas de *realización* en topología algebraica:

COROLARIO 2.20. Para todo grupo G con una presentación finita existe espacio Y tal que $\pi_1 Y = G$

Dem. (idea) Para $G = \langle t_1, \dots, t_n \mid r_1, \dots, r_s \rangle$ consideramos $X = \bigvee_n S^1$. Como $\pi_1 Y = \langle t_1, \dots, t_n \rangle$ toda palabra en $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ corresponde a una función punteada $(S^1, p) \rightarrow (X, y_0)$ y podemos dar un sentido geométrico a las relaciones r_i mediante $f_1, \dots, f_s : (S^1, p_i) \rightarrow (Y, y_0)$ tales que $[f_i] = r_i$.


Pegamos 2-celdas de manera iterada en X a través de las funciones f_j :

$$Y := (\dots ((Y \cup_{f_1} e^2) \cup_{f_2} e^2) \dots \cup_{f_s} e^2)$$

Por el Teorema 2.19 anterior tenemos

$$\pi_1 X = \pi_1 Y / [f_i] = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle / N,$$

donde N es el subgrupo normal generado por $\{r_1, \dots, r_s\}$. Es decir, $\pi_1 X \cong G$. \blacksquare


 Por este resultado, toda presentación finita puede pensarse como las instrucciones para contruir espacios celulares.

6. Clasificación de superficies

Paso final en la clasificación de superficies compactas y conexas:

LEMA 2.21. Sea S superficie compacta, conexa con palabra asociada f en un alfabeto de n letras. Entonces

$$\pi_1 S = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \mid f \rangle$$

 Con esto tenemos el cálculo de grupos fundamentales de superficies:

(1) La palabra asociada a $S_g = \#_g T^2$ es

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

De aquí que

$$\pi_1 S_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{1 \leq i \leq g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$$

Notemos que para $g = 1$ tenemos

$$\pi_1 T^2 = \langle a_1, b_1 \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

(2) La palabra asociada a $N_g = \#_g \mathbb{R}P^2$ es $a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2$. De aquí que

$$\pi_1 N_g = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid a_1^2 a_2^2 \cdots a_g^2 \rangle$$

Para $g = 1$ se tiene


$$\pi_1 \mathbb{R}P^2 = \langle a_1 \mid a_1^2 \rangle = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \blacktriangleleft$$

TEOREMA 2.22 (Clasificación de Superficies). *La esfera S^2 , la suma conexa de toros S_g y la suma conexa N_g de planos proyectivos son superficies no homeomorfas entre sí*

Dem. Por los cálculos anteriores tenemos que

- $\pi_1 S^2 = 1 \Rightarrow (\pi_1 S^2)_{ab} = 1$
- $\pi_1 S_g = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{1 \leq i \leq g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \rangle$
 $\Rightarrow (\pi_1 S_g)_{ab} = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{2g}$
- $\pi_1 N_g = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid \prod_{1 \leq i \leq g} a_i^2 \rangle$
 $\Rightarrow (\pi_1 N_g)_{ab} = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}_2$

Puesto que todas las abelianizaciones no son isomorfas entre si, se sigue que S^2, S_g, N_g no son homeomorfos entre si pues π_1 es un invariante topológico (Teorema 1.19). ■

 Consecuencias del cálculo de grupo fundamental de superficies:

- $S_g \not\cong S_h$ si $g \neq h$
- Una superficie S es simplemente conexa $\Leftrightarrow S \cong S^2$

- Sean X espacio topológico y $x_0 \in X$. Si la abelianización $(\pi_1(X, x_0))_{ab}$ no es de la forma Z^{2m} ó $Z^{n-1} \times Z_2$, entonces X no es una superficie.

CAPÍTULO 3

Apéndices

1. Topología

TEOREMA 3.1 (de Lebesgue). *Sea (X, d) espacio metrico compacto y $\{O_i\}$ una cubierta abierta de X . Entonces existe un numero real $\delta > 0$ tal que toda bola abierta de radio δ esta contenida en algún abierto O_j de la cubierta.*

La prueba de este resultado puede consultarse en [32], [36] ó en cualquier otro texto de topología elemental.

Sean X espacio topológico y Y conjunto. Dada una función sobreyectiva $f : X \rightarrow Y$ definimos:

$$U \subset Y \text{ abierto} \Leftrightarrow f^{-1}(U) \subset X \text{ abierto}$$

La colección $\tau = \{U \subset Y \mid U \text{ abierto}\}$ es una topología para Y llamada **topología cociente**. En estas condiciones f es llamada **función cociente** y tiene la siguiente caracterización:

TEOREMA 3.2. *Sea $f : X \rightarrow Y$ función cociente. Una función $g : Y \rightarrow Z$ es continua \Leftrightarrow la composición $g \circ f : X \rightarrow Z$ es continua*

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ f \downarrow & \searrow^{g \circ f} & \\ Y & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

Existe un caso particular donde la topologia cociente surge de manera natural y frecuente: dada una relación de equivalencia en

X y X/\sim el conjunto de clases equivalencia, definimos

$$\pi : X \longrightarrow X/\sim, \quad x \longmapsto [x]$$

Equipado de la topología cociente, el conjunto X/\sim es llamado el **espacio cociente de X por la relación \sim** . Como un subconjunto $U \subset X/\sim$ es una colección de clases de equivalencia, la pre-imágen $f^{-1}(U)$ es la unión de los elementos de X cuyas clases de equivalencia pertenecen a U ; así, un abierto en X/\sim es una colección de clases de equivalencia cuya unión es un abierto en X .

Directo de la propiedad mencionada arriba se tiene el siguiente

TEOREMA 3.3. Sean $f : X \rightarrow Y$ función continua, \sim relación de equivalencia en X y $\pi : X \rightarrow X/\sim$ función cociente. Entonces existe función continua $g : X/\sim \rightarrow Y$ tal que $g \circ \pi = f \Leftrightarrow$ la función f es constante en clases de equivalencia.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow g & \\ X/\sim & & \end{array}$$

EJEMPLO 3.4. Sea $f : X \rightarrow Y$ función continua y definamos

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Por el teorema anterior existe $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow Y$ continua e inyectiva; como se mencionó anteriormente, decimos que f factoriza al cociente definiendo a \tilde{f} . ◀

Otro caso especial de la topología cociente se describe a continuación: tomemos $A \subset X$ y definamos

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, & x, y \notin A \\ x, y \in A \end{cases}$$

Con esta relación se obtiene una partición de X que consiste del conjunto A y los unipuntuales $\{x\}$, para $x \notin A$. El espacio cociente por esta relación se denota por X/A y se dice que X/A se obtiene mediante el **colapso** del subespacio A .

El siguiente ejemplo muestra que podemos usar discos para definir esferas...

EJEMPLO 3.5. Para todo entero $n \geq 1$ definamos una función

$$f : D^n \rightarrow S^n, \quad f(x) = \begin{cases} (2x, \sqrt{1 - |2x|^2}), & |x| \leq 1/2 \\ (\alpha_x x, -\sqrt{1 - |\alpha_x x|^2}), & |x| \geq 1/2 \end{cases}$$

donde $\alpha_x = 4 - 4|x|$. Notemos que f envía a $x \in \partial D^n = S^{n-1}$ al punto $(0, -1)$, por el Ejemplo 3.4 existe función $\tilde{f} : D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$ la cual es además una biyección. Finalmente, como el dominio es compacto, y el contradominio es Hausdorff, se sigue que \tilde{f} es homeomorfismo y $D^n/S^{n-1} \cong S^n$. ◀

... y el siguiente muestra discos construidos con esferas:

EJEMPLO 3.6. Tomemos el subespacio $S^{n-1} \times \{0\}$ de $S^{n-1} \times [0, 1]$ y consideremos la función cociente

$$q : S^{n-1} \times [0, 1] \longrightarrow S^{n-1} \times [0, 1]/(S^{n-1} \times \{0\})$$

Por otro lado, tomemos la función $f : S^{n-1} \times [0, 1] \rightarrow D^n$ dada por $f(x, t) = tx$. Observemos que f es compatible con el cociente pues todos los puntos de la forma $(x, 0)$ son enviados al mismo punto. Por el Teorema 3.3 existe una función continua

$$\tilde{f} : S^{n-1} \times [0, 1]/(S^{n-1} \times \{0\}) \longrightarrow D^n$$

tal que $\tilde{f} \circ q = f$. Al igual que antes, \tilde{f} es biyección, su dominio es compacto y el contradominio Hausdorff; de aquí que \tilde{f} es homeomorfismo y por tanto $S^{n-1} \times [0, 1]/(S^{n-1} \times \{0\}) \cong D^n$. ◀

En general, la topología cociente preserva conexidad y compacidad pero no ser Hausdorff:

EJEMPLO 3.7. Tomemos \mathbb{R} con topología euclidiana y definamos

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ó} \\ |x| = |y| > 1 \end{cases}$$

La función cociente $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ satisface $q(1) \neq q(-1)$ pero dichos puntos no tienen vecindades disjuntas; es decir, \mathbb{R}/\sim no es Hausdorff. ◀

En general, el problema de hallar condiciones para garantizar que el cociente de un Hausdorff sea también Hausdorff es difícil pero en la presencia de compacidad se simplifica considerablemente:

TEOREMA 3.8. Sea $f : X \rightarrow Y$ función cociente con X compacto y Hausdorff. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes

- (1) Y es Hausdorff
- (2) f es función cociente cerrada
- (3) $\{(x_1, x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ es cerrado.

Dem. (1) \Rightarrow (3) Recordemos que Y es Hausdorff $\Leftrightarrow \Delta$ es cerrado; finalmente notemos que $K = (f \times f)^{-1}(\Delta)$, con $f \times f : X \times X \rightarrow Y \times Y$.

(3) \Rightarrow (2) Tomemos $A \subset X$ cerrado y recordemos (Teo. Kuratowski ??) que al ser X compacto, las proyecciones $p_1, p_2 : X \times X \rightarrow X$ son cerradas por lo que $p_1(K), p_2(K)$ son cerrados. Por otro lado notemos

$$f^{-1}(f(A)) = p_1(K \cap p_2^{-1}(A))^1$$

por lo que $f^{-1}(f(A))$ es cerrado y f es función cociente cerrada.

(2) \Rightarrow (1) Consideremos $a \neq b \in Y$. Dado que f es sobreyectiva, cerrada y los puntos en X son cerrados tenemos que a, b son cerrados. Entonces

$$A = f^{-1}(a), \quad B = f^{-1}(b)$$

son compactos y disjuntos. Como X es Hausdorff, el Teorema de Wallace ?? garantiza la existencia de abiertos U, V tales que

$$A \times B \subset U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta,$$

es decir, $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$ y $(X \setminus U) \cap (X \setminus V) = X$. Finalmente, como f es cerrada,

$$U' = Y \setminus f(X \setminus U), \quad V' = Y \setminus f(X \setminus V)$$

son vecindades abiertas y disjuntas de a, b . ■

2. Abelianización

El *subgrupo conmutador* de un grupo G , denotado por $[G, G]$, es el subgrupo normal generado por el conjunto $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$. En el cociente

$$G_{ab} := G/[G, G]$$

todos los conmutadores se colapsan a la identidad y todos los elementos de G_{ab} conmutan. El grupo abeliano G_{ab} es llamado la *abelianización de G* o el *grupo derivado de G* ([21, Prop. 9.1]). Algunas propiedades:

- $[G, G]$ es trivial $\Leftrightarrow G$ es abeliano

¹ $K \cap p_2^{-1}(A) = \{(x_1, x_2) \in X \times A \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ y al proyectar me quedo con $x \in X, f(x) \in f(A) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

- Si $G \cong H \Rightarrow G_{ab} \cong H_{ab}$.

La Prop. Universal de la Abelianización de un grupo que afirma que G_{ab} es el cociente abeliano más “grande” de G , en el sentido de que cualquier homomorfismo de G en un grupo abeliano factoriza a través de G_{ab} .

COROLARIO 3.9. Sean H es grupo abeliano y $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfismo de grupos. Entonces existe un único $\bar{\varphi} : G_{ab} \rightarrow H$ tal que $\bar{\varphi}([g]) = \varphi(g)$, para todo $g \in G$; es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & G & \\ \swarrow & & \searrow \varphi \\ G_{ab} & \overset{\bar{\varphi}}{\dashrightarrow} & H \end{array}$$

Estamos interesados en la abelianización del producto libre, lo cual está dado en el siguiente resultado

LEMA 3.10. Dados G_1, \dots, G_n se tiene que

$$(G_1 * G_2 * \dots * G_n)_{ab} \cong (G_1)_{ab} \times (G_2)_{ab} \times \dots \times (G_n)_{ab}$$

En particular, observemos que $(\mathbb{Z} * \mathbb{Z})_{ab} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

3. Aplicaciones de $\pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$

3.1. Sobre el grado de funciones continuas II. Puesto que $[0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$ por lo que toda función $f : [a, b] \rightarrow X$ tal que $f(a) = f(b)$ es equivalente a una de la forma $S^1 \rightarrow X$. Así, dada una función circular $f : S^1 \rightarrow S^1$ se define

$$\deg(f) := \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0),$$

para \tilde{f} levantamiento de f .

Como se mencionó previamente, el concepto de grado formaliza al número de vueltas que una función $S^1 \rightarrow S^1$ realiza alrededor de la circunferencia. Más aún, para la función $c_n : S^1 \rightarrow S^1$ dada por $c_n(\theta) = n\theta$ se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 3.11. Para toda función circular $f : S^1 \rightarrow S^1$ existe un único entero n tal que $f \simeq c_n$.

El entero del resultado anterior es lo que en ciertos contextos se define como grado ([1, Cap.9]) pues la función c_n tiene grado n ([25, Lema 3.5.8]). El grado de una función también refleja algunos comportamientos geométricos de las funciones:

TEOREMA 3.12. Si una función circular $f : S^1 \rightarrow S^1$ tiene grado no cero, entonces f es sobreyectiva.

3.2. Teorema Fundamental del Álgebra.

TEOREMA 3.13. Todo polinomio de coeficientes complejos, de grado ≥ 1 tiene al menos una raíz compleja.

Dem. Consideremos el polinomio

$$p(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \cdots + a_1z + a_0, \quad k \geq 1$$

Si suponemos que no tiene raíces en $S^1 \subset \mathbb{C}$ entonces podemos definir $f : S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto p(z)/\|p(z)\|$.

- Si $p(z) \neq 0$, para $|z| \leq 1$ entonces

$$H : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow S^1, \quad H(z, t) = f(tz) = \frac{p(tz)}{\|p(tz)\|}$$

define una homotopia entre f y la función constante $a_0/\|a_0\|$, por lo que $\deg(f) = 0$.

- Por otro lado, si $p(z) \neq 0$, $|z| \geq 1$ consideramos

$$H : S^1 \times [0, 1] \longrightarrow S^1, \quad H(z, t) = \frac{t^k p(z/t)}{\|t^k p(z/t)\|}$$

homotopia entre f y la función z^k ; luego $\deg(f) = k$.

Si, si p no tiene raíces en ningún lado $0 = k$ y el teorema se sigue. ■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior:

COROLARIO 3.14. *Todo polinomio $p(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_1z + a_0$ complejo tiene una factorización de la forma*

$$p(z) = (z - r_1)(z - r_2) \cdots (z - r_k),$$

para ciertos números complejos r_1, \dots, r_k

3.3. El Teorema de Pto. Fijo de Brouwer. Recordemos que el *Teorema del Valor Medio* afirma que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua tal que $f(a) < c < f(b)$ ó $f(a) > c > f(b)$, entonces existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = c$. Con esto es posible probar:

LEMA 3.15 (Brouwer, dim. 1). *Para toda función continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$*

Dem. Definamos $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante $g(x) = f(x) - x$. Dado que $(f(0) \neq 0) \wedge (f(1) \neq 1)$ entonces $g(1) < 0 < g(0)$. Por el teo. Valor Medio existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$. ■

El siguiente resultado representa el primer paso en la generalización del resultado anterior:

TEOREMA 3.16 (Brouwer, dim. 2). *Sea \overline{D}^2 disco unitario cerrado en \mathbb{R}^2 . Entonces toda función continua $f : \overline{D}^2 \rightarrow \overline{D}^2$ tiene un punto fijo.*

Dem. Sea $f : \overline{D}^2 \rightarrow \overline{D}^2$ continua con $f(x) \neq x, \forall x \in \overline{D}^2$. Consideremos la línea l_x que une a $f(x)$ con x y la prolongamos hasta que se intersecte con S^1 en el punto y_x . Definamos

$$r : \overline{D}^2 \longrightarrow S^1, x \mapsto y_x.$$

Notemos que r es continua y además $r|_{S^1} = 1_{S^1}$; es decir, r es una retracción. Por el Teorema 1.22 sabemos que la inclusión induce el homomorfismo inyectivo

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 S^1 & \hookrightarrow & \pi_1 \overline{D}^2 \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{Z} & \hookrightarrow & \{1\} \end{array}$$

lo cual no puede ser y el teorema se sigue. ■

El teorema de Brouwer tiene implicaciones importantes dentro de la Geometría como la clasificación de las isometrías del plano hiperbólico (ver [13], Sec. 1.1.2)

3.4. El Teorema de Borsuk-Ulam. El Teorema de Borsuk-Ulam tiene diversas aplicaciones tanto en Topología como en Combinatoria (Teoría de Gráficas) y Geometría; véase el libro [31].

TEOREMA 3.17 (Borsuk-Ulam). *Para toda función continua $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Este resultado es sólo un caso particular del teorema publicado por K. Borsuk de 1933 ([6]). La traducción del título es *Tres teoremas sobre la esfera euclidiana n -dimensional*, donde el segundo de ellos es el caso n dimensional del resultado anterior. Más adelante veremos algunos resultados equivalentes al anterior.

Probaremos el Teorema de Borsuk-Ulam usando algunos resultados auxiliares:

LEMA 3.18. *Toda función continua $f : S^1 \rightarrow S^1$ que cumple $f(z) = -f(-z), \forall z$ tiene grado impar.*

LEMA 3.19. *No existe función continua $f : S^2 \rightarrow S^1$ tal que $f(-z) = -f(z), \forall z \in S^2$.*

Dem. de Teorema 3.17 Supongamos que no existe $x \in S^2$ tal que $f(x) = f(-x)$ y definamos

$$g : S^2 \rightarrow S^1, \quad g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$$

Notemos que $g(-z) = -g(z)$, lo cual no puede ser por el Lema 3.19 y el teorema se sigue. ■

TEOREMA 3.20 (Lusternik-Schnirelmann). *Si la esfera S^2 se expresa con la unión de tres subconjuntos cerrados A, B, C , entonces al menos uno de ellos contiene el par de puntos antipodales $\{x, -x\}$.*

Dem. Para $F \subseteq X$ consideramos la distancia de cualquier $x \in X$ a F :

$$d_F(x) = \inf_{y \in F} d(x, y)$$

Definimos con esto $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (d_A(x), d_B(x))$. Por el Teo. de Borsuk-Ulam, existe $x_0 \in S^2$ tal que $g(x_0) = g(-x_0)$; es decir,

$$d_A(x_0) = d_A(-x_0), \quad d_B(x_0) = d_B(-x_0)$$

Ahora, notemos que $x_0 \in A \Leftrightarrow d_A(x_0) = d_A(-x_0) = 0 \Leftrightarrow -x_0 \in A$. De igual manera, $x_0 \in B \Leftrightarrow -x_0 \in B$. Así, si $x_0 \notin A \cup B \Rightarrow -x_0 \notin A \cup B$ y por tanto $x_0 \in C \Leftrightarrow -x_0 \in C$. ■



El resultado anterior está relacionado con el concepto de la *categoría LS de un espacio*: denotado por $cat(X)$, la categoría LS describe el mínimo número de espacios contráctiles abiertos que cubren a X . La descripción de $cat(X)$ en términos homotópicos y cohomológicos, así como de sus propiedades lo hacen un invariante de gran importancia dentro de la *Topología Robótica*.

3.5. Invarianza del dominio. La siguiente aplicación del grupo fundamental es de gran importancia pues permite, entre otras cosas, mostrar que la dimensión de una variedad está bien definida (ver Ex 2.1.8 de [25]).

TEOREMA 3.21 (Invarianza del Dominio). *Si $n \neq 2$, entonces $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ no son homeomorfos.*

Dem. Notemos que el caso $n = 1$ es conocido y puede ser demostrado usando herramientas de conexidad (ver Cap. 5 de [36]).
2

Sea $n \geq 3$. Supongamos que existe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo que, s.p.g., cumple $f(0) = (0, 0)$ y consideremos el homeomorfismo inducido

$$\mathbb{R}^n \setminus 0 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 \setminus 0$$

²Recordemos que si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces induce un homeomorfismo $f : X \setminus \{x\} \rightarrow Y \setminus \{f(x)\}$, para todo $x \in X$.

Recordemos que S^{n-1} es retracto por deformación de $\mathbb{R}^n \setminus 0$, por tanto $\pi_1 \mathbb{R}^n \setminus 0 \cong \pi_1 S^{n-1}$, que es trivial para $n \geq 2$. Por otro lado, el homeomorfismo de arriba induce

$$S^{n-1} \cong S^1 \Rightarrow \pi_1 S^{n-1} \cong \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z},$$

asi, para $n = 2$, se tiene que $\{1\} = \mathbb{Z}$. Por lo tanto $\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$. ■

Referencias

- [1] Adams, C., Franzosa, R., Introduction to Topology Pure and Applied, Pearson, 2009.
- [2] Arkowitz, M., Introduction to Homotopy Theory, Universitext, Springer-Verlag, 2011.
- [3] Artin, E., *Theorie der Zöpfe*, Abh. Math. Sem. Hamburg, **4** (1925), 47-72.
- [4] Baer, R., Levi, F., *Freie Produkte und ihre Untergruppen*, Compositio Mathematica, **3** (1936), 391-398.
- [5] Biss, D.K., *A Generalized Approach to the Fundamental Group*, The American Mathematical Monthly, vol 107 **8** (2000), 711-720.
- [6] Borsuk, K., *Drei Satze uber die n-dimensionale euklidische Sphere*, Fund. Math. **20** (1933), 177-190.
- [7] Bredon, G.E., Topology and Geometry, Springer-Verlag, 1993.
- [8] Brown, R., Topology and Groupoids, 2008.
- [9] Christie, D.E., Basic Topology. A developmental Course for Beginners, New York, Macmillan, 1976.
- [10] Crowell, R.H., Fox, R.H., Introduction to Knot Theory, Graduate Texts in Mathematics (57), Springer-Verlag, 1963.
- [11] Dieudonné, J., A History of Algebraic and Differential Topology (1900-1960), Birkhauser, 1989.
- [12] Fadell, E.; Neuwirth, L., *Configuration spaces*, Math. Scand., **10** (1962), 111-118.
- [13] Farb, B., Margalit, D., A Primer on Mapping Class Groups, Princeton University Press, 2011.
- [14] Félix, Y., Tanré, D., Topologie Algébrique, Dunod, 2010.
- [15] Frenkel, E., Love and Math. The Heart of Hidden Reality, Basic Books, 2014.
- [16] Fulton, W., Algebraic Topology, A first Course, Springer, 1995.
- [17] Ghrist, R., Elementary Applied Topology, 2014. Disponible aquí.
- [18] González, J., González, E., *El Teorema de van Kampen y Aplicaciones*, Morfismos, Vol. 2 No. 2, 1998, 37-47.
- [19] Gowers, T. (editor), The Princeton Companion to Mathematics, Princeton University Press, 2008.
- [20] Greenberg, M.J., Harper, J.R., Algebraic Topology. A First Course, Mathematics Lecture Note Series, The Benjamin Cummings Publishing Company, 1981.
- [21] Grillet, P.A., Abstract Algebra, Graduate Texts in Mathematics 242, Springer, 2007.
- [22] Gruning, J., Lens Spaces, Tesis de Maestría, Universidad de Viena, 2015.
- [23] Hatcher, A., Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2004.
- [24] Kosniowski, C., A First Course in Algebraic Topology, Cambridge University Press, 1980.
- [25] Lawson, T., Topology. A Geometric Approach, Oxford University Press, 2003.

- [26] Lee, J.M., Introduction to Topological Manifolds, Graduate Texts in Mathematics 202, Springer-Verlag, 2000.
- [27] Lee, J.M., Introduction to Smooth Manifolds, Graduate Texts in Mathematics 202, Springer-Verlag, 2006.
- [28] Lima, E.L., Fundamental Groups and Covering Spaces, A K Peters, 2003.
- [29] Longoni, R., Salvatore, P. *Configuration spaces are not homotopy invariant*, Topology **44** (2), 2005, 375-380.
- [30] Lusternik, L., Schnirelmann, L. *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationelles*, Issledovatelkii Institut Matematiki i Mechaniki pri O.M.G.U., Moscow, 1930, pp. 36.
- [31] Matousek, J., Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry (2nd edition), Universitext, Springer, 2008.
- [32] Maldonado, M.A., Topología I (notas de clase), Unidad Académica de Matemáticas, UAZ, 2015.
- [33] Maldonado, M.A., Topología y Superficies para el Verano (notas de clase), Unidad Académica de Matemáticas, UAZ, 2016.
- [34] Manetti, M., Topology, Springer-Verlag, 2015.
- [35] May, J.P., A Concise Course in Algebraic Topology, Chicago Lectures in Mathematics, 1999.
- [36] McCleary, J., A First Course in Topology: Continuity and Dimension, Student Mathematical Library Vol. 31, American Mathematical Society, 2006.
- [37] McCleary, J., A User's Guide to Spectral Sequences (2nd ed.), Cambridge University Press, 2001.
- [38] Milnor, J.W., Stasheff, J.D., Characteristic Classes, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.
- [39] Monastyrsky, M., Riemann, Topology, and Physics, Modern Birkhauser Classics, reprint of the second edition, 2008.
- [40] Munkres, J.R., Topology, Prentice Hall, 2000.
- [41] Murillo, A., *Robótica Topológica: Complejidad topológica de Planificadores de Movimiento*, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, Vol.12 Num. 1, 2009.
- [42] de Neymet, S., Introducción a los Grupos Topológicos de Transformaciones, Aportaciones Matemáticas **23**, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.
- [43] Ranicki, A., *Notes on Reidemeister Torsion*, <http://www.maths.ed.ac.uk/ear/papers/>.
- [44] Seifert, H., Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Teubner, Leipzig-Berlin, 1934.
- [45] Stillwell, J., Classical Topology and Combinatorial Group Theory, Springer-Verlag, 1993.
- [46] Tietze, H., *Über die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Monash. für Math. u. Phys., **19** (1908), 1-118.
- [47] tom Dieck, T., Algebraic Topology, European Mathematical Society, 2008.
- [48] Zisman, M., Topología Algebraica Elemental, Paraninfo, SA, Madrid, 1979.