UNA INTRODUCCIÓN ALGEBRAICA A LA HOMOLOGÍA

MIGUEL A. MALDONADO

1. Sucesiones exactas

Una sucesión de R-módulos de la forma

$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión ***exacta en*** M_i si $im(f_{i+1}) = ker(f_i)$, esto significa que la composición $f_i \circ f_{i+1}$ es el homomorfismo trivial y además $ker(f_i) \subset im(f_{i+1})$. La sucesión se dice ***exacta*** si lo es en cada $M_i, \forall i$.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

es llamada una ***sucesión exacta corta (s.e.c.)***. Directo de la definición se observa que f_1 es inyectivo & f_2 es sobreyectivo. Tomamos el submódulo $N := im(f_1) = ker(f_2)$ de M_2. Por el 1er Teorema del Isomorfismo (para módulos) tenemos que

$$M_1/ker(f_1) \cong M_1 \cong im(f_1) = N,$$

es decir, $M_1 \cong N \subseteq M_2$. De igual forma, f_2 induce el isomorfismo

$$M_2/ker(f_2) = M_2/im(f_1) \cong im(f_2) = M_3,$$

de donde $M_3 \cong M_2/N$. De lo anterior se sigue que toda sucesión corta como la de arriba tiene la forma

$$\text{submodulo} \rightarrow \text{modulo} \rightarrow \text{cociente}$$

Ciertas sucesiones exactas cortas permiten expresar características de R-homomorfismos:

- $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B$ es exacta $\Leftrightarrow$ f es inyectiva
- $A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ es exacta $\Leftrightarrow$ f es sobreyectiva

Finalmente, de lo anterior obtenemos que $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ es exacta $\Leftrightarrow$ f es isomorfismo.

Ejemplo 1.1. Tres sucesiones exactas sencillas:

(1) Para $n \geq 2$, consideremos los Z-homomorfismos
$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ p \mapsto np \qquad \text{multiplicación por } n$$
$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ p \mapsto p\, mod n \qquad \text{reducción módulo } n$$
y notemos que producen una sucesión exacta corta de la forma
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

(2) Todo R-homomorfismo $f : M \to N$ sobreyectivo produce una sucesión exacta corta
$$0 \longrightarrow ker f \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

(3) En general, todo R-homomorfismo $f : M \to N$ produce una sucesión exacta corta de la forma
$$0 \longrightarrow ker(f) \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow N/im(f) \cong coker(f) \longrightarrow 0 \quad \blacktriangleleft$$

Lema 1.2. *En toda sucesión exacta*
$$N_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \xrightarrow{h} M_1 \tag{1.2}$$
h es monomorfismo y f epimorfimo $\Leftrightarrow$ $g = 0$.

Dem. $\boxed{\Rightarrow}$ Por exactitud $im(g) = ker(h), im(f) = ker(g)$; por hipótesis $ker(h) = 0, im(f) = N$, por lo que $ker(g) = N, im(g) = 0$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Por exactitud $im(g) = ker(h), im(f) = ker(g)$; de donde $ker(h) = 0$ y además $im(f) = N$, como se quería probar. ■

Un último comentario sobre las s.e.c.: consideremos la sucesión exacta larga
$$\cdots \longrightarrow M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$
y hagamos $N_i = im(f_{i+1}) = \ker(f_i), \forall i$. De esto obtenemos una sucesión exacta de la forma
$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/N_i \longrightarrow 0$$
Más aun, del isomorfismo
$$M_i/N_i \cong M_i/\ker(f_i) \cong im(f_i) = N_{i+1}$$
se sigue que la sucesión exacta tiene la forma
$$0 \longrightarrow N_i \longrightarrow M_i \longrightarrow N_{i+1} \longrightarrow 0$$
Es decir, toda sucesión exacta larga produce sucesiones exactas cortas
$$0 \to im(f_{i-1}) \to M_i \to im(f_i) \to 0$$
en cada dimensión i.◀

Decimos que una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

se ***escinde por la derecha*** si existe $g' : M_2 \to M$ tal que $g \circ g' = 1_{M_2}$. De igual forma se define la escisión por la izquierda. El ejemplo típico de sucesión que se escinde (por la derecha) es la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

El siguiente resultado muestra que todas las sucesiones que se escinden son practicamente como la sucesión anterior.

Teorema 1.3. *Si la sucesión $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ es exacta y se escinde, entonces existe un isomorfismo $M \cong M_1 \oplus M_2$.*

Puede darse una demostración de este resultado a través de la Propiedad Universal de la Suma Directa; véase [3, Prop.4.8]. ■

2. El lema del 5to

Diversos resultados dentro del álgebra homológica pueden ser demostrados mediante el típico argumento de un *chasing diagram* o *persecución de elementos*, una técnica visual que hace uso de la conmutatividad del diagrama, así como las propiedades de los homomorfismos involucrados.

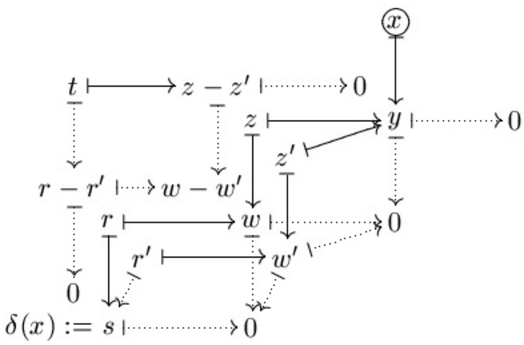

Figure 1. Ejemplo tomado de esta página

El siguiente resultados es uno de los más usados dentro del álgebra homológica y la topología algebraica, pues, en términos generales, establece una relación fuerte entre los homomorfismos de un diagrama conmutativo.

Lema 2.1 (del 5to). *Considere el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "h'"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "h''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "g'"] & N \arrow[r, "g"] & N_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

cuyos renglones están dados por sucesiones exactas. Si dos de los tres R-homomorfismos h', h, h'' son isomorfismos, entonces el tercero también lo es.

En realidad este resultado es una instancia particular del resultado que considera un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_3 \arrow[r] \arrow[d] & M_4 \arrow[r] \arrow[d] & M_5 \arrow[d] \\ N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5 \end{tikzcd}$$

cuyos renglones están dados por sucesiones exactas; el homomorfismo de enmedio es isormorfismo si los otros cuatro lo son.

La conmutatividad en el lema del 5to es importante: si el diagrama siguiente fuera conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{Z}_4 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & \mathbb{Z}_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

entonces $\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, lo cual no es cierto.

Daremos una demostración del lema del 5to (y del lema de la serpiente) usando un resultado que involucra las homologías de complejos de cadena que forman una sucesión exacta; véase teorema 4.1.

3. Homología

Un **complejo de cadenas** es una sucesión de módulos y homomorfismos[1]

$$\mathcal{C}: \qquad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

tales que $d_n \circ d_{n+1} = 0, \forall n \geq 1$. **Notación:** $\mathcal{C} = \{(C_n, d_n)\}_{n \geq 0}$

En el complejo anterior definimos el submódulo de los ***n*-ciclos** como $ker(d_n)$ y lo denotamos por $Z_n(\mathcal{C})$. Así $x \in Z_n \Leftrightarrow x \in C_n,\ d_n(x) = 0$. De

[1] Estos homomorfismos se suelen llamar *diferenciales*

igual forma definimos el submódulo de ***n-fronteras*** como $im(d_{n+1})$ y lo denotamos por $B_n(\mathcal{C})$. Observemos que tenemos inclusiones

$$0 \subseteq B_n(\mathcal{C}) \subseteq Z_n(\mathcal{C}) \subseteq C_n$$

pues en el complejo de cadenas se tiene $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

El ***n-ésimo módulo de homología*** del complejo de cadenas $\mathcal{C}$ se define como el cociente

$$H_n(\mathcal{C}) := Z_n(\mathcal{C})/B_n(\mathcal{C}) = \frac{ker\, d_n : C_n \to C_{n-1}}{im\, d_{n+1} : C_{n+1} \to C_n}$$

Dado $x \in Z_n(\mathcal{C})$ denotamos por $[x]$ al correspondiente elemento en $H_n(\mathcal{C})$, y lo llamaremos su ***clase de homología***. Observemos que $x, x' \in Z_n(\mathcal{C})$ son ***homólogos*** si $x - x' \in B_n(\mathcal{C})$.

⚠ Observemos que si $\mathcal{C}$ es una sucesión exacta, entonces $H_n(\mathcal{C})$ es trivial, para toda dimensión n. De esto tenemos que la homología mide la exactitud (o falta de ella) de una sucesión de módulos y morfismos como en (3.1).

Algunas observaciones:

- Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tienen dos sucesiones exactas fundamentales
$$0 \longrightarrow B_n(\mathcal{C}) \longrightarrow Z_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow Z_n(\mathcal{C}) \longrightarrow C_n \xrightarrow{d'_n} B_{n-1}(\mathcal{C}) \longrightarrow 0,$$
donde $d'_n = d_n$ con la imagen $im(d_n) = B_{n-1}$.

- En todo complejo de cadenas $\mathcal{C}_*$ con $d_n = 0$ se tiene que $H_n(\mathcal{C}_*) \cong C_n$. En particular, dado un complejo de cadenas $\mathcal{C}_*$, los complejos de cadenas asociados (con $d_n = 0$)
$$\mathcal{Z}_* : \qquad \cdots \longrightarrow Z_{n+1}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow Z_n(\mathcal{C}_*) \longrightarrow Z_{n-1}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow \cdots,$$
$$\mathcal{B}_* : \qquad \cdots \longrightarrow B_{n+1}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow B_n(\mathcal{C}_*) \longrightarrow B_{n-1}(\mathcal{C}_*) \longrightarrow \cdots,$$
cumplen que $H_n(\mathcal{Z}_*) \cong Z_n, H_n(\mathcal{B}_*) \cong B_n$.

- Sea $f : A \to B$ homomorfismo de módulos. El complejo de cadenas definido como
$$\mathcal{C}_f : \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$
con A, B en posiciones $n, n-1$, respectivamente, y con $d_n := f, d_k := 0, \forall k \neq n$, es llamado ***complejo de cadenas concentrado en dimensiones*** $n, n-1$. Notemos que
$$\begin{cases} H_{n-1}(\mathcal{C}_f) = B/im(f) = coker(f), \\ H_n(\mathcal{C}_f) = ker(f)/im(d_2) = ker(f) \end{cases}$$
y además $H_k(\mathcal{C}_f) = 0, \;\; k \neq n-1, n$.

Ejemplo 3.1. Algunos ejemplos con $R = \mathbb{Z}$; es decir, estamos considerando sucesiones de grupos abelianoas

(1) Definamos $C_n = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ para $n \geq 0$, $C_n = 0$ para $n < 0$. Para
$$d_n : C_n \to C_{n-1} \quad d_n(x\, mod 8) = 4x\, mod 8$$
la sucesión
$$\cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \longrightarrow 0$$
es un complejo de cadenas pues $(d_n \circ d_{n+1})(x\, mod 8) = 16x\, mod 8 = 0$. ¿Cuál es su homología?.

(2) Sea $p \geq 0$ entero fijo y definamos
$$\begin{cases} C_n = \mathbb{Z}, & 0 \leq n \leq p \\ C_n = 0, & n > p. \end{cases} \qquad \begin{cases} d_n : C_n \to C_{n-1} & \\ d_n(x) = 2x, & n \text{ par} \\ d_n(x) = 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$
Notemos que tenemos un complejo de cadenas de la forma
$$\mathcal{C} : \qquad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Z} \cdots \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
debido a que
$$(n \text{ impar}) \quad \ker(d_n) = \mathbb{Z}, im(d_n) = 0,$$
$$(n \text{ par}) \quad \ker(d_n) = 0, im(d_n) = 2\mathbb{Z}$$
¿Cuál es su homología?, ¿qué ocurre si $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$?◀

Un **morfismos entre los complejos de cadenas** $\mathcal{C} = \{(C_n, d_n)\}_{n\geq 0}$,$\mathcal{D} = \{(D_n, d'_n)\}_{n\geq 0}$ consiste de una colección de homomorfismos $f_* = \{f_n : C_n \to D_n\}_n$ que determinan un cuadrado conmutativo de cada dimensión

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ D_n \arrow[r, "d'_n"] & D_{n-1} \end{tikzcd}$$

Usaremos la notación $\mathcal{C} \xrightarrow{f_*} \mathcal{D}$.

Observemos que para un complejo de cadenas $\mathcal{C}$ existe el morfismo identidad $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que consiste del homomorfismo identidad en cada dimensión:

$$\begin{tikzcd} C_n \arrow[r] \arrow[d, "I"] & C_{n-1} \arrow[d, "I"] \\ C_n \arrow[r] & C_{n-1} \end{tikzcd}$$

Por otro lado, dos morfismos de complejos de cadenas $\mathcal{C} \xrightarrow{f_*} \mathcal{D} \xrightarrow{g_*} \mathcal{E}$ determinan un morfismo
$$\mathcal{C} \xrightarrow{g_* \circ f_*} \mathcal{E}$$

que consiste de las composiciones $\{g_n \circ f_n : C_n \to E_n\}_{n\geq 0}$.

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] \arrow[dd, bend right=60, "g_n \circ f_n"'] & C_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \arrow[dd, bend left=60, "g_{n-1} \circ f_{n-1}"] \\
D_n \arrow[r] \arrow[d, "g_n"] & D_{n-1} \arrow[d, "g_{n-1}"] \\
E_n \arrow[r] & E_{n-1}
\end{tikzcd}$$

Lema 3.2. *Todo morfismo $f_* : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ lleva ciclos de $\mathcal{C}$ en ciclos de $\mathcal{D}$, y fronteras de $\mathcal{C}$ en fronteras de $\mathcal{D}$. Es decir, para cada dimensión $n \geq 0$*

$$f_n(Z_n(\mathcal{C})) \subseteq Z_n(\mathcal{D}), \quad f_n(B_n(\mathcal{C})) \subseteq B_n(\mathcal{D})$$

Dem. *El resultado se obtiene usando la conmutatividad de los diagramas determinados por el morfismo.* ■

Por el resultado anterior, todo morfismo $\mathcal{C}_* \xrightarrow{f_*} \mathcal{D}_*$ induce homomorfismos

$$H_n(f) : H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{D}), \quad [x] \mapsto [f_n(x)]$$

Denotamos a esta colección de homomorfismos a nivel de homología mediante $H_*(f) : \{H_n(f)\}_{n\geq 0}$. Más aun, de los comentarios previos a este resultado tenemos que

$$H_*(I) = I : H_*(\mathcal{C}) \longrightarrow H_*(\mathcal{C}),$$
$$H_*(g \circ f) = H_*(g) \circ H_*(f) : H_*(\mathcal{C}) \longrightarrow H_*(\mathcal{E}),$$

para los morfismos identidad $\mathcal{C} \xrightarrow{I} \mathcal{C}$ y $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D} \xrightarrow{g} \mathcal{E}$.

Decimos que dos morfismos de complejos de cadenas $f, g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son ***homotópicos*** si existe una sucesión de homomorfismos

$$H =: \{H_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}\} \qquad \text{(homotopía)}$$

tales que en el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C_n \arrow[r] \arrow[dl, "H_n"'] \arrow[d, shift right, "g_n"'] \arrow[d, shift left, "f_n"] & C_{n-1} \arrow[dl, "H_{n-1}"] \\
D_{n+1} \arrow[r] & D_n &
\end{tikzcd}$$

se tiene que

(3.2) $$d_{n+1} \circ H_n + H_{n-1} \circ d_n = f_n - g_n, \ \forall n.$$

Usaremos la notación $f \simeq g$ para referirnos a morfismos homotópicos. Esta relación de homotopía $\simeq$ es una relación de equivalencia, pues basta tomar las homotopías $H = 0$, $H' = -H$ y $H'' = H + H'$, para las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente.

Lema 3.3. *Si* $f \simeq g$, *entonces* $H_*(f) = H_*(g)$.

Dem. Tomemos la relación (3.2) en la definición de homotopía para un ciclo x para obtener

$$(d_{n+1} \circ H_n)(x) + (H_{n-1} \circ d_n)(x) = (f_n - g_n)(x)$$

Al ser un ciclo obtenemos $(d_{n+1} \circ H_n)(x) = f_n(x) - g_n(x)$, por lo que

$$f_n(x) - g_n(x) = d_{n+1}(H_n(x)) \in B_n(\mathcal{D})$$

obteniendo que $[f_n(x)] = [g_n(x)]$, como se quería. ■

4. Sucesión exacta en homología

Una ***s.e.c. de complejos de cadenas***

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

consiste de una colección de sucesiones exactas cortas de la forma

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{f_n} B_n \xrightarrow{g_n} C_n \longrightarrow 0 \qquad \forall n \geq 1$$

Es decir, una sucesión como (4.1) consiste de un sistema de sucesiones exactas *concatenadas* a través de los homomorfismos respectivos de cada complejo de cadenas

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d] & B_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d] & C_{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & B_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d] & B_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d] & C_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.1. *Si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas, entonces existe un homomorfismo

$$\delta_n : H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{A})$$

tal que se obtiene la siguiente sucesión exacta larga en homología

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(A) \arrow[r, "H_n(f)"] & H_n(B) \arrow[r, "H_n(g)"] & H_n(C) \arrow[dll, "\delta"'] & \\ & H_{n-1}(A) \arrow[r, "H_{n-1}(f)"'] & H_{n-1}(B) \arrow[r, "H_{n-1}(g)"] & H_{n-1}(C) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dem. Una vez que se construye δ, mediante la persecusión de elementos, se debe probar que en cada nodo de la sucesión se tiene exactitud; es decir, que el kernel y la imagen coinciden en cada nodo. ■

Corolario 4.2. *(Lema de la Serpiente) Para el siguiente diagrama conmutativo con renglones dados por sucesiones exactas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

existe un homomorfismo $\delta : ker(\gamma) \to coker(\alpha)$ tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & ker(\alpha) \arrow[r] & ker(\beta) \arrow[r] & ker(\gamma) \arrow[dll, "\delta"'] & \\ & coker(\alpha) \arrow[r] & coker(\beta) \arrow[r] & coker(\gamma) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Dem. Cosideramos los tres complejos de cadenas concentrados en dimensiones $0, 1$ determinados por α, β, γ y notemos que la homología en dimensión 0 de cada uno de los complejos es el kernel del correspondiente homomorfismo y que en dimensión 1 se tiene el cokernel; la exactitud de la sucesión se obtiene del resultado anterior. ■

Corolario 4.3. *(Lema del Quinto) Considere el siguiente diagrama conmutativo con renglones dados por sucesiones exactas:*

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\varphi_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\varphi_4"'] & A_5 \arrow[d, "\varphi_5"'] \\ B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r, "g_3"] & B_4 \arrow[r, "g_4"] & B_5 \end{tikzcd}$$

Si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5$ son ismorfos entonces φ_3 también lo es.

Dem. Las hipótesis del resultado permiten obtener un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & coker(f_1) \arrow[r] \arrow[d] & A_3 \arrow[r] \arrow[d] & \ker(f_4) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & coker(g_1) \arrow[r] & B_3 \arrow[r] & \ker(g_4) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde los morfismos verticales a la derecha e izquierda son isomorfismos también por hipotesis. Después de verificar la exactitud de los renglones, se aplica el lema de la serpiente para concluir. ■

Concluimos con el siguiente resultado que muestra que la asociación de la sucesión exacta larga en homología satisface cierta *naturalidad* entre morfismos de complejos de cadenas.

Lema 4.4. *Todo diagrama conmutativo con renglones dados por sucesiones exactas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r] & \mathcal{B}' \arrow[r] & \mathcal{C}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo en homología de la forma

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_n(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\alpha)"'] & H_n(\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\beta)"'] & H_n(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d, "H_n(\gamma)"'] & H_{n-1}(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "H_{n-1}(\alpha)"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_n(\mathcal{A}') \arrow[r] & H_n(\mathcal{B}') \arrow[r] & H_n(\mathcal{C}') \arrow[r] & H_{n-1}(\mathcal{A}') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

References

[1] Dummit, D.S., Foote, R.M., Abstract Algebra, John Wiley & Sons, 1999.
[2] Hatcher, A., Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2000.
[3] Lluis-Puebla, E., ÁLGEBRA HOMOLÓGICA, COHOMOLOGÍA DE GRUPOS Y K-TEORÍA ALGEBRAICA CLÁSICA, Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

Unidad Académica de Matemáticas, UAZ.
Email address: mmaldonado@uaz.edu.mx