UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE ZACATECAS
“Francisco García Salinas”
UNIDAD ACADÉMICA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS

Nombre del Estudiante		**Fecha**	27/JUN/2018
Correo electrónico		**Semestre**	
Número de celular		**Aciertos**	
Examen	admision	**Calificación**	
Profesores	Patricia Jiménez, Juan Antonio Pérez, Miguel A. Maldonado		

INSTRUCCIONES GENERALES: Resuelva 6 de los 8 ejercicios propuestos, explicando y justificando cada una de sus respuestas.

Cálculo AvÃ¡Ã©nzado

1. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un rectángulo, $f, g : A \to \mathbb{R}$, con f integrable y tal que el conjunto $\{x \in A | f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida cero. Demuestre que g es integrable y además
$$\int f = \int g.$$
2. Sea (f_n) una sucesión de funciones $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f_1(x) = x$, y además
$$\left(f'_{n+1}(x)\right)^2 = 1 + f'_n(x)$$
para todo $n \in \mathbb{N}_+$. Demuestre que (f_n) es convergente, que si $f_n \to f$, entonces $f(x) = kx + f(0)$, y calcule la constante k.
3. Demuestre, usando el teorema del valor medio, que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \geq 0$.
4. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 1 - |x - 1|$, y
$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Determine los puntos de discontinuidad de $g \circ f$ y de $f \circ g$.

Álgebra Lineal

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$ y defínase $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ mediante
$$f_1(x, y, z) = x - 2y, \quad f_2(x, y, z) = x + y + z,$$
$$f_3(x, y, z) = y - 3z.$$
Demostrar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base para V^* y luego encontrar una base para V para la cual sea el dual.
2. Usando la regla de Cramer resuelva el sistema
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$
3. Determine el complemento ortogonal de los siguientes subespacios e interprete geometricamente

a) $W = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y - z = 0\}$

b) $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = 5t, y = 3t, z = t, \; t \in \mathbb{R}\}$

4. Calcule los valores propios y los vectores propios correspondientes a la matriz definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre una matriz invertible N tal que $N^{-1}AN$ es diagonal.

5. Sea $T : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}^3$ definida mediante

$$[T] = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Encuentre una base para cada espacio propio y cada espacio propio generalizado de T. Proporcione una base canónica β de Jordan y la forma canónica de Jordan $[T]_\beta$.