Examen de admisión a la maestría 2019
Unidad Académica de Matemáticas, UAZ.

Instrucciones. Lee con cuidado los enunciados de los problemas. Justifica tus respuestas.

1. Sea V el espacio vectorial de matrices de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{R}$. Consideremos $U := \{A \in V | A = A^T\}$ el conjunto de matrices simétricas y $W := \{A \in V | A = -A^T\}$ el conjunto de matrices antisimétricas.

   (a) Demuestra que U y W son subespacios vectoriales de V

   (b) Demuestra que $V = U \oplus V$.

   (c) Calcula las dimensiones de U y W.

2. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A$.

   (a) Demuestre que sus valores propios son 0 y 1.

   (b) Pruebe que A es diagonalizable.

   (c) Describe todas las matrices tales que $A^2 = A$.

3. Calcula la forma canónica de Jordan de la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta.

   (a) Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua en A, entonces también la función $|f|$ es continua en A.

   (b) La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

   es continua en 0.

   (c) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $a \leq f(x) \leq b$ para todo $x \in [a, b]$, entonces no existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

   (d) El conjunto de todos los números irracionales es contable.

5. Define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$