ÁLGEBRA LINEAL
Problemario

1. Sea X un conjunto finito y sea $\mathcal{P}(X)$ su conjunto potencia . Demuestra que $\mathcal{P}(X)$ junto con las siguientes operaciones es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{Z}_2$ y calcula su dimensión:

   suma: Sea $U_1, U_2 \in \mathcal{P}(X)$, definimos su suma como
$$U_1 + U_2 := U_1 \cup U_2 \backslash U_1 \cap U_2,$$

   producto escalar: Como en este caso el campo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ solo tiene dos elementos, es suficiente decir qué significa multiplicar por el elemento cero y por el elemento uno: Sea $U \in \mathcal{P}(X)$ entonces
$$0 * U := \emptyset \quad y \quad 1 * U := U.$$

2. Sea V un espacio vectorial:

   i) Sean $S_1, S_2 \subset V$ subconjuntos; demuestra que
$$\langle S_1 \cap S_2 \rangle \subset \langle S_1 \rangle \cap \langle S_2 \rangle.$$

   ii) Sean $W_1, W_2 \subset V$ subespacios; demuestra que
$$\langle W_1 \cap W_2 \rangle = \langle W_1 \rangle \cap \langle W_2 \rangle.$$

3. Sean V, W, X, Z espacios vectoriales sobre F y sean $U : V \to W$ y $T : Z \to X$ isomorfismos de espacios vectoriales. Demuestra que las siguientes funciones son isomorfismos de espacios vectoriales:

   i)
$$\begin{aligned} \phi_U : End(V) &\to End(W) \\ f &\mapsto U \circ f \circ U^{-1} \end{aligned}$$

   ii)
$$\begin{aligned} U^* : W^* &\to V^* \\ f &\mapsto f \circ U \end{aligned}$$

   iii)
$$\begin{aligned} \psi : Hom_F(V, Z) &\to Hom_F(W, X) \\ f &\mapsto T \circ f \circ U^{-1} \end{aligned}$$

4. Sean V_1, V_2 subespacios vectoriales de un espacio V, demuestra que

$$V_1 \times V_2 \cong V_1 \oplus V_2.$$

5. Sea $V = V_1 \oplus V_2$ la suma directa de dos subespacios vectoriales. Considera las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \pi_1 : V &\longrightarrow V_1 \\ v_1 + v_2 &\mapsto v_1 \\ \iota_1 : V_1 &\longrightarrow V \\ v_1 &\mapsto v_1 + \mathbf{0}_{V_2} \end{aligned}$$

Demuestra que:

i) las funciones π_1, ι_1 están bien definidas;

ii) π_1 es una transformación lineal sobreyectiva;

iii) ι_1 es una transformación lineal inyectiva;

iv) $\pi_1 \circ \iota_1 = I_{V_1}$;

v) $\iota_1 \circ \pi_1$ no es sobreyectiva, en particular, π_1 no es un isomorfismo.

6. Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V y considera el subespacio generado por S definido como

$$\langle S \rangle := \bigcap_{\substack{W \text{ subespacio} \\ S \subset W}} W.$$

Demuestra que

$$\langle S \rangle = \{v \in V | v \text{ es una combinación lineal de elementos en } S\}.$$

7. Sea $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ y $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, y - z = 0\}$ demuestra que $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

8. Sea W_1 el subconjunto de las matrices en $F_{2\times 2}$ de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a + b = c + d$ y sea W_2 el subconjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $b - c = a$; demuestra que W_1, W_2 son subespacios vectoriales y calcula $dim(W_1), dim(W_2), dim(W_1 \cap W_2), dim(W_1 + W_2)$.

9. Sea $n \in \mathbb{N}$ un número fijo y sea $\mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n]$ los polinomios en n variables con coeficientes en $\mathbb{C}$. Sea

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$$

un polinomio lineal con $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, ..., a_n \neq 0$. Y consideremos el espacio vectorial

$$\mathcal{V} := \{(k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{C}^n | p(k_1, k_2, ..., k_n) = 0\};$$

Calcula $dim(\mathcal{V})$.

10. Considera la transformación lineal derivada

$$D : V_n \to V_n$$
$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n \mapsto c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + ... + nc_nx^{n-1},$$

Calcula $ker(D)$ y $rank(T)$.

11. Sea V un espacio vectorial, demuestra que $V \cong V^*$.

12. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, da una base de V^*.

13. Sea $V = \{f(x) \in F[x] | grad(f) \leq 3\}$ y considera la base ordenada $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ definida como:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 + x \\ f_2(x) &= x^3 + x - 5 \\ f_3(x) &= x + 1 \\ f_4(x) &= 6 \end{aligned}$$

i) Sea $E = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ la base ordenada donde

$$\begin{aligned} b_1(x) &= 1 \\ b_2(x) &= x + 1 \\ b_3(x) &= x^2 + 1 \\ b_4(x) &= x^3 + 1. \end{aligned}$$

Calcula $[b_i]_B$ para $i = 1, 2, 3, 4$.

ii) Sea $\{g_1(x) = 1, g_2(x) = x - 1, g_3(x) = (x - 1)^2, g_4(x) = (x - 1)^3\}$, demuestra que esta es una base de V y calcula $[g_4]_B$.

iii) Sea $D : V \to V$ la derivada. Calcula $[D]_{BE}$.

14. Sea V un espacio vectorial y sea $S \subset V$ un subconjunto. definimos el **anulador** de S como el subespacio vectorial de V^*, denotado S^0:

$$S^0 = \{f \in V^* | f(s) = 0 \;\; \forall s \in S\}.$$

i) Demuestra que S^0 es un subespacio vectorial de V^*

ii) Sea W un subespacio de V y $\{w_1, ..., w_k\}$ una base de W. Considera las funciones

$$\begin{aligned} ev_i : V^* &\to F \\ f &\mapsto f(w_i). \end{aligned}$$

Demuestra que

$$W^0 = \bigcap_{i=1}^{k} Ker(ev_i).$$

iii) Si W es un subespacio de V y $dim(V) < \infty$, demuestra que

$$dim(W) + dim(W^0) = dim(V).$$

15. Considera los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos como

$$V := \{(a, 0, a) | a \in \mathbb{R}\} \text{ y } W := \{(b, c, -b) | (b, c) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Demuestra que $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

16. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interior.

i) Si $S \subset V$ es un subconjunto, demuestra que

$$S^\perp =< S >^\perp .$$

ii) Si $W \subset V$ es un subespacio, demuestra que

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

17. Considera el espacio vectorial

$$V_n = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | grad(p(x)) \leq n\}.$$

i) Demuestra que la siguiente función es un producto interior en V_n:

$$\begin{aligned} V_n \times V_n &\to \mathbb{R} \\ (\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \sum_{i=0}^{n} b_i x^i) &\mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i b_i. \end{aligned}$$

ii) Considera la función derivada $D : V_n \to V_n, p(x) \mapsto p'(x)$ la cual es un operador lineal en V_n. Calcula D^*.

18. Demuestra que los siguientes operadores de $\mathbb{C}^n$ son autoadjuntos:

i) $T(a, b) = (a - ib, ia + 2b)$.

ii) $T(a, b, c) = (a + c, 0, a + c)$.

iii) $T(a_1, ..., a_n) = (a_1, 2a_2, ..., na_n)$.

19. Sea V un espacio de dimensión finita con producto interior. Sea $T \in End(V)$ un operador y para cada $k \in \mathbb{N}$ denotemos como

$$T_k : \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{k\text{-veces}} \in End(V).$$

Si $n \in \mathbb{N}$ es un número fijo y T es autoadjunto, demuestra que el siguiente operador es autoadjunto:

$$F := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k T_k.$$

20. Sea V un espacio de dimensión finita $dim(V) = n$ con un producto interior y sea $W \subset V$ un subespacio de dimensión k:

i) demuestra que $dim(W^{\perp}) = n - k$;

ii) demuestra que $W = (W^{\perp})^{\perp}$

iii) demuestra que existen hiperespacios $H_1, ..., H_{n-k}$, tales que

$$W = \bigcap_{j=1}^{n-k} H_j.$$

Si $v_1, ..., v_{n-k}$ es base de $W^{\perp}$ muestra que $H_j = \langle v_j \rangle^{\perp}$ satisfacen.

21. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con un producto interior y sea $T \in End(V)$ un operador. Demuestra que

$$Im(T)^{\perp} = Ker(T^*).$$

22. Sean

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_n) &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ f_2(x_1, ..., x_n) &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

un conjunto de polinomios lineales con coeficientes en F en las variables $x_1, ..., x_n$. Podemos definir un sistema de m ecuaciones lineales en n incógnitas como:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, ..., x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, ..., x_n) &= 0. \end{aligned}$$

El espacio solución de este sistema de ecuaciones, es el conjunto

$$Z(f_1, ..., f_n) := \{(a_1, ..., a_n) \in F^n | f_i(a_1, ..., a_n) = 0, \forall i\}.$$

i) Demuestra que $Z(f_1, ..., f_n)$ es un subespacio de F^n.

ii) Sea $A \in F_{m\times n}$ la matriz definida como $A = (a_{ij})$. Demuestra que

$$dim(Z(f_1, ..., f_n)) = n - rank(A).$$

23. Calcula el polinomio mínimo, el polinomio característico, los valores propios y los subespacios invariantes de los siguientes operadores considerados como operadores en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$:

    i) $T(a, b, c) = (a, a - b, b - c)$.

    ii) $T(a, b) = (a + b, a - 2b)$.

    iii) $T(a, b, c, d) = (a + 2c, b - d, a + 2c, b - d)$.

24. Si $A \in F_{n\times n}$, demuestra que $\lambda \in F$ es una raíz del polinomio mínimo de A si y sólo si es una raíz del polinomio característico de A.

25. Sea V_n es espacio de polinomios reales de grado a lo más n. Calcula el rango del operador derivada $D \in End(V_n)$.

26. Sea $A \in F_{n\times n}$ una matriz diagonal. Demuestra que el rango de A es el número de escalares no cero en la diagonal. En particular, Una matriz diagonal es invertible si y sólo si no tiene ceros en la diagonal.

27. Decide cuáles de los siguientes operadores en $\mathbb{R}^n$ son diagonalizables. Justifica tu respuesta:

    i) $T(a, b) = (a - b, a)$.

    ii) $T(a, b, c) = (a + c, a - b, c + b)$.

    iii) $T(a, b, c) = (2a - b, c, 3b)$.

28. Sea $T \in End(V)$ diagonalizable y sean $\lambda_1, ...\lambda_k$ los valores propios distintos de T. Demuestra que existen operadores $E_1, ..., E_k \in End(V)$ tales que:

    i) $E_1 + \cdots + E_k = I_V$;

    ii) $T = \lambda_1 E_1 + \cdots \lambda_k E_k$;

    iii) $E_i \circ E_j = T_0$ para todo $i \neq j$;

    iv) $E_i \circ E_i = E_i$ para todo i;

    v) $Im(E_i) = V_{\lambda_i}(V)$ para todo i.