Examen de Ingreso: Maestría en Matemáticas

Junio 6, 2017

1. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita y V^* su espacio dual. Sea W un subespacio de V. Muestre que

$$W_0 := \{f \in V^* | f(x) = 0 \text{ para cada } x \in W\}$$

es un subespacio de V^* y que $\dim(W) + \dim(W_0) = \dim V$.

2. Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre k, $f \in \mathrm{End}_k(V)$ y $W = \langle v, f(v), f^2(v), \ldots \rangle$. Sea $m = \dim_k W$. Prueba que:

a) $\{v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{m-1}(v)\}$ es base de W sobre k.

b) Si $a_0 v + a_1 f(v) + \ldots + a_{m-1} f^{m-1}(v) + f^m(v) = 0$ entonces $C_{f|_W}(X) = (-1)^m (a_0 + a_1 X + \ldots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m)$.

b) Aplicando $a), b)$ y el hecho que $C_{f|_W}(X) | C_f(X)$ pruebe que $C_f(f) = 0$.

Recuerda que $C_f(X)$ denota el polinomio característico de f.

3. Calcula la forma canónica de Jordan de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $f(tx) = t^m f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $t \in \mathbb{R}$.Muestre que si f es diferenciable entonces

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = m f(x).$$

5. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Demuestre que existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f(c) = \int_0^c f(x)dx.$$

6. Considere la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x, y) = (x \cos y, y \sin x).$$

a) Demuestre que f es diferenciable en $a = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ y calcule $D_a f$.

b) Determine si f es localmente invertible en a y en tal caso determine $D_{f(a)} g$ donde g es la inversa local de f en $f(a)$.

c) Encuentre una expresión local para g.