Examen de Admisión
Maestría en Matemáticas*
Universidad Autónoma de Zacatecas

Unidad Académica de Matemáticas

Diciembre 12 de 2016

Instrucciones: Resuelvaa al menos 5 de los 7 ejercicios, omitiendo a lo sumo uno de cada disciplina. Tiene 3 horas para entregar sus soluciones, únicamente en el papel que le será entregado para el efecto.

1 Álgebra Lineal

1. (a) Demuestre que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ a & 1 & x & x^2 \\ p & b & 1 & x \\ q & r & c & 1 \end{bmatrix} = (1-ax)(1-bx)(1-cx)$$

   (b) Determine las condiciones sobre a ,b, c y k para que el sistema

$$\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ ax+bx+cz &= k \\ a^2x+b^2y+c^2z &= k^2 \end{aligned}$$

   i. admita una solución única,
   ii. tenga una infinidad de soluciones,
   iii. carezca de soluciones.

2. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Definimos las funciones $f_1, f_2, f_3 : V \to \mathbb{R}$ mediante las ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= 2-2y \\ f_2(x,y,z) &= x+y+z \\ f_3(x,y,z) &= y-3z \end{aligned}$$

   Demuestre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base para el espacio dual V^*.

*Elaborado por: Patricia Jiménez, Juan Antonio Pérez y Danie Duarte

3. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

determine:

(a) rango y nulidad,

(b) una base para los subespacios elementales,

(c) el polinomio característico, y el polinomio mínimo,

(d) su forma canónica de Jordan, dando expícitamente la matriz invertible S usada para determinar dicha forma.

2 Cálculo

1. Calcule

$$\frac{d}{dx^2} x^x.$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable, calcule

$$\frac{d}{dx} \int_{f(-x)}^{f(x)} u^2 du.$$

3. Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de Cauchy tal que para cada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$, $N > \frac{1}{\epsilon}$, tal que $|x_N| < \epsilon$. Demuestre que la sucesión converge a 0.

4. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua y diferenciable en $(0,1)$. Suponga que $f(0) = 0$ y que $|f'(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in (0,1)$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$.