MAESTRÍA EN MATEMÁTICAS UAZ
Examen de admisión

5 de mayo del 2022

Instrucciones: Resuelve los siguientes problemas y argumenta cada paso de tu solución.

1. Demuestra que si A es un subconjunto de los números enteros entre 1 y n tales que $|A| > 2n/3$, entonces para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $i + 3k \in A$.

2. Sea F un campo. Considera la función
$$\begin{aligned} T : F_{n\times n} &\to F_{n\times n} \\ A &\mapsto A - \frac{\text{traza } A}{n} I \end{aligned}$$
   i) Muestra que T es transformación lineal;
   ii) Calcula la dimensión de la imagen y del espacio anulador de T.

3. Sea V un espacio de dimensión finita $dim(V) = n$ sobre un campo F con un producto interior y sea $W \subset V$ un subespacio de dimensión k:
   i) Demuestra que $dim(W^{\perp}) = n - k$;
   ii) Demuestra que $W = (W^{\perp})^{\perp}$
   iii) Demuestra que existen subespacios $H_1, ..., H_{n-k}$, tales que $dim(H_j) = n - 1$ y que
$$W = \bigcap_{j=1}^{n-k} H_j.$$
   Sugerencia: Si $v_1, ..., v_{n-k}$ es base de $W^{\perp}$ muestra que $H_j = \langle v_j \rangle^{\perp}$ satisfacen.

4. Sea g continua. Calcule $D_{(a,b)}f$, donde
$$f(x, y) = \int_0^{xy} g(t)dt.$$

5. Determine la integrabilidad sobre $I = [0, 1]$ de la función $f : I \to I$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in \mathcal{C} \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \mathcal{C} \end{cases},$$
   donde $\mathcal{C} \subseteq I$ es el conjunto ternario de Cantor. Si es el caso, calcule
$$\int_0^1 f(x)dx.$$