Propuesta de ejercicios para examen de admisión enero 2021

Cálculo

1. Determine el plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^4$ en el punto $(1, 3)$.

2. Encuentre los puntos críticos de la siguiente función y determine si son máximos, mínimos o puntos silla:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$$

3. * Encuentre los puntos críticos de la siguiente función y determine si son máximos, mínimos o puntos silla:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

4. Demuestre, usando el teorema del valor medio, que $e^x \geq 1 + x$ para todo $x \geq 0$.

5. Considere las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = 1 - |x - 1|$, y

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x, & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Determine los puntos de discontinuidad de $g \circ f$ y de $f \circ g$.

6. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Muestre que las parciales $\partial^2 f / \partial x \partial y, \partial^2 f / \partial y \partial x$ existen en $(0, 0)$ pero no coinciden.

7. Calcule el valor aproximado de $1.01^{2.001}$.

8. Determine la derivada direccional de la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = x^2 + 3xy$$

en el punto $x_0 = (2, 0)$, en la dirección de $U = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

9. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x_0 \in A^\circ$ y u vector unitario. De la definición de derivada direccional pruebe que $D_u f(x_0) = -D_{-u} f(x_0)$.

10. Determine el conjunto donde la siguiente función está bien definida:

$$f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$

¿Es f función C^1? Determine la derivada direccional de f en $C = (0,1)$ en la dirección de un vector (a,b).

11. *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es **homogénea de grado** m si $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}$, $f(tx) = t^m f(x)$. Pruebe que si f es diferenciable entonces $Df(x)x = mf(x)$; es decir,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = mf(x)$$

12. *Determine la función $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que para la función

$$F(x_1, \ldots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$$

se cumple que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$.