EL TEOREMA DE HOPF-RINOW

MIGUEL A. MALDONADO

1. Introducción

El **Teorema de Hopf-Rinow**, publicado en 1931 por H. Hopf y su alumno W. Rinow ([1]), establece condiciones sobre una superficie S bajo las cuales cualquier geodésica en S puede ser extendida de manera indefinida.

A manera de motivación recordemos los Postulados I y II de Euclides (en una re-definición de D. Hilbert):

(1) Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de linea recta
(2) Un segmento de recta se puede extender indefinidamente para formar una linea recta

Notemos que en el plano "ponchado" $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ el Postulado I no es cierto: no existe ninguna linea que una a los puntos $(-1,0), (1,0)$. Así, resulta natural preguntarse qué condiciones debe cumplir una superficie S para que tales postulados sean ciertos, considerando a la geodésica como el concepto análogo de linea recta.

2. Preliminares

Sean S superficie, $T_p(S)$ el plano tangente a S en el punto p y consideremos la bola abierta de radio $\epsilon > 0$ como

$$B_\epsilon(p) = \{\overline{w} \in T_p(S) \mid \ ||w|| < \epsilon\}$$

Si denotamos por $\gamma_{p,\overline{v}}$ a la geodésica que pasa por p en la dirección $\overline{v}/||\overline{v}||$ con longitud $||\overline{v}||$, entonces definimos la **función exponencial**

$$\exp_p : B_\epsilon(p) \longrightarrow S, \quad \overline{w} \longmapsto \gamma_{p,\overline{w}}(\overline{w});$$

es decir, $\exp_p(\overline{w})$ se define como el punto de S que se encuentra a lo largo de la única geodésica que pasa por p, en la dirección $\overline{w}/||\overline{w}||$ de longitud $||\overline{w}||$.

La función exponencial permite expresar qué tan lejos se puede viajar a partir de un punto en S a lo largo de una geodésica que pase por dicho punto: para todo $p \in S$, existe un valor $0 < \epsilon_p \leq \infty$ tal que $\exp_p$ mapea la bola abierta $B_{\epsilon_p}(p)$ de manera difeomorfa a una vencidad de p; véase [2] para propiedades de la función exponencial.

Con este lenguaje podemos re-interpretar el Postulado II de Euclides en el contexto de superficies como sigue: decimos que una superficie S es **geodésicamente completa** si toda geodésica $\gamma : [a, b] \to S$ puede ser extendida a una geodésica $\gamma : \mathbb{R} \to S$.

El que una superficie sea geodesicamente completa implica que, dada una geodésica $\gamma : [a, b] \to S$ con $p = \gamma(a)$, la función $\exp_p$ está bien definida para cualquier vector de cualquier longitud, en cualquier dirección a partir de p. En estos términos de la función exponencial tenemos: *Una superficie S es geodésicamente completa $\Longleftrightarrow \forall p \in S$ el dominio de la función exponencial $\exp_p$ es todo el plano tangente $T_p(S)$.*

Notemos que la esfera "ponchada" $S^2 \backslash \{x_s\}$, donde x_s es su polo sur, no es geodésicamente completa pues cualquier geodésica con dirección hacia el polo sur tiene longitud finita.

Como veremos más adelante los Postulados I y II de Euclides se establecen en los terrenos de superficies a través del concepto de ser geodésicamente completa. En particular, resulta natural preguntarse cómo se relaciona la completud geodésica con el problema de hallar una geodésica de longitud mínima que una cualesquiera par de puntos de S; esto lo responde el Lema 3.1.

El siguiente resultado nos permitirá extender geodésicas:

Lema 2.1. *Para $p \in S$, existe una vecindad U de p y $\epsilon > 0$ tal que si $q \in U$ y $\overline{v} \in T_q(S)$ con $||v|| < \epsilon$, entonces existe una única geodésica*

$$\gamma_{\overline{v}} : (-1, 1) \longrightarrow S$$

tal que $\gamma_{\overline{v}}(0) = q$, $\gamma'_{\overline{v}}(0) = \overline{v}$.

3. El Teorema

Dada una curva regular $\alpha : [t_0, t_1] \to S$ consideremos su longitud dada por $L(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle}\, dt$. Definimos una función distancia en S mediante

$$d : S \times S \to \mathbb{R}, \quad (p, q) \mapsto \inf\{L(\alpha_{p,q}) \mid \alpha_{p,q}\},$$

donde $\alpha_{p,q}$ es una curva regular en S que une a p con q. La prueba de que d define una métrica en S recae en propiedades elementales de la función exponencial; de igual forma, no es dificil probar que la topologia que hereda $S \subset \mathbb{R}^3$ es la misma que tiene como espacio métrico (S, d). El siguiente resultado muestra la relación entre la completud geodésica de S y el Postulado I de Euclides:

Lema 3.1. *Si S es una superficie conexa geodésicamente completa, entonces cualquier par de puntos puede unirse por una geodésica de longitud mínima. Es decir, $\forall p, q \in S$ existe una geodésica $\gamma[a, b] \to S$ tal que $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ y además $L(\gamma) = d(p, q)$.*

Dem. (esbozo) Al ser S conexa cualesquiera puntos de S pueden ser unidos por una curva regular *a pedazos* y la prueba de este lema consiste en usar dicha curva para construir la geodésica buscada. Para $\rho = d(p,q)$ consideremos $\epsilon_p > 0$ tal que $\exp_p : B_{\epsilon_p} \to S$ es un difeomofismo local y cada par de puntos de $\exp_p(B_{\epsilon_p})$ puede ser unido por una única geodésica de unitaria. Para $\delta \in (0, \epsilon_p)$ considérese la "esfera"

$$S_\delta = \{\overline{w} \in T_p(S) \mid \ ||w|| = \delta\}$$

La compacidad de $\Sigma = \exp_p(S_\delta)$ permite tomar $p_0 \in \Sigma$ tal que $d(p_0, q) \leq d(s,q), \forall s \in \Sigma$. Por la elección de ϵ_p, $\ p_0 = \exp_p(\delta \overline{v}_0)$, para algún vector unitario $\overline{v}_0$; la geodésica de longitud mínima buscada se define como $\gamma(t) = \exp_p(t\overline{v}_0)$. Se requiere de un análisis más detallado para mostrar que se pueden elegir curvas regulares a pedazos (de longitud mínima) que forman parte de la geodésica propuesta; véase [2], p. 342. ■

Teorema 3.2 (de Hopf-Rinow)**.** *Una superficie conexa S es geodesicamente completa $\Longleftrightarrow$ (S,d) es un espacio métrico completo.*

Dem. Sea S geodesicamente completa. Como consecuencia del análisis mencionado en la prueba del lema anterior, si $A \subset S$ es subconjunto de diametro ρ y $p \in A$, entonces la función exponencial $\exp_p : T_p(S) \to S$ mapea el disco cerrado B_ρ en un compacto que contiene a A; de aquí, la cerradura $\overline{A}$ es un compacto (por ser subespacio cerrado de un compacto). En particular, de esto se sigue que cualquier subconjunto acotado de S tiene cerradura compacta. El resultado se sigue de notar que (el rango de) una sucesión de Cauchy en S es siempre acotada y por lo tanto converge a un punto de S; es decir, (S,d) es completo.

Supongamos que (S,d) es espacio métrico completo y tomemos $\gamma : (a,b) \to S$ geodésica parametrizada (unit-speed). En el dominio (a,b) consideremos una sucesión de Cauchy $\{t_i\}_{i \in N}$ que converja a b. Por las condiciones en γ se tiene que $\{\gamma(t_i)\}_{i \in N}$ es sucesión de Cauchy y por lo tanto converje a, digamos, $\gamma(b)$. Para extender la geodesica γ usamos el Lema 2.1: dado que $\gamma(b)$ está definido y $\gamma'(b)$ es calculable como limite izquierdo, extendemos a γ más allá de b; realizando este proceso en ambas direcciones podemos extender el dominio de la geodésica γ a todo $\mathbb{R}$ y por tanto S es geodesicamente completa. ■

Algunas observaciones:

- Consideremos la sucesión de Cauchy $(1/n, 0)$ en el espacio $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ y notemos que no es convergente; asi, el espacio no es completo y por lo tanto tampoco es geodesicamente completo.
- El Teorema de Hopf-Rinow establece las condiciones bajo las cuales los Postulados I y II de Euclides son válidos en el contexto de superficies (conexas).
- Por Topología General, si S es superficie compacta y conexa, entonces es completa y por tanto geodesicamente completa.

References

[1] Hopf, H., Rinow, W., *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Commentarii Mathematici Helvetici **3** (1), 209225, 1931.
[2] Spivak, M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1, 1970.

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas.
E-mail address: `mmaldonado@matematicas.reduaz.mx`