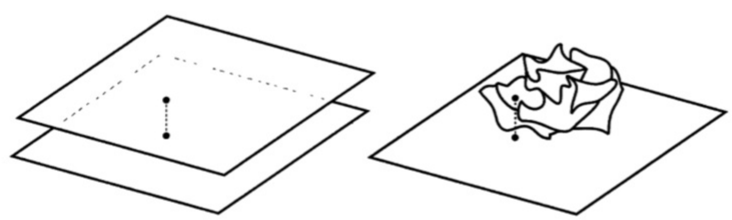
Proyecto final de Topología
Teorema de punto fijo de Browuer

José Miguel Pacheco Torees

May 2018

1 Introducción

Imagine tomar dos hojas de papel del mismo tamaño y colocar una encima de la otra. Cada punto en la hoja superior de papel está asociado con algún punto, justo debajo de él, en la otra hoja. Ahora, toma la hoja superior de papel y moldeela en una bola sin romperla. Coloque la bola arrugada en la parte superior de la hoja inferior de papel. En algún lugar de la bola de papel hay un punto que está asociado directamente sobre el mismo punto en la hoja inferior de papel que estaba arriba antes de que se produjera el arrugamiento. Esta es una aplicación del Teorema del Punto Fijo de Brouwer en Dos Dimensiones, que demostramos en esta sección.



2 Desarrollo

DEFINICIÓN 10.1. Sea $f : X \to X$. Se dice que un punto $x \in X$ tiene un punto fijo si $f(x) = x$. Se dice que un espacio topolgíco X tiene la propiedad de punto fijo si cada función continua $f : X \to X$ tiene un punto fijo.

El intervalo cerrado [0,1] tiene la propiedad del punto fijo: Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ un mapeo continuo. Si $f(0) = 0$ o $f(1) = 1$, entonces nuestra asignación tiene un punto fijo en 0 o 1. Si no, entonces $f(0) \geq 0$ y $f(1) - 1 \leq 0$. Por lo tanto, la función $g(x) = f(x) - x$ es una función de valor real continuo que es positiva en $x = 0$ y negativa en $x = 1$. Por el teorema del valor intermedio, hay algún punto x_0 con g $x_0 = 0$, que es decir que $f(x_0) - x_0 = 0$, y entonces x_0 es un punto fijo. El intervalo abierto no tiene la propiedad de punto fijo. El mapeo $f(x) = x^2$ no tiene un punto fijo en el intervalo $(0, 1)$.

Dado que establecimos el teorema de dos dimensiones sin retracción en la sección 9.2, se sigue el teorema del punto fijo de Brouwer bidimensional.

TEOREMA 9.13. El Teorema de no retracción bidimensional. No hay retracción del disco D en su límite circular S^1
Prueba. Lo probamos por contradicción. Asuma entonces que existe una función continua $F : D \to S^1$ tal que $F(x) = x$ para todo $x \in S^1$. Tal función F es una extensión continua de la función de identidad $id : S^1 \to S^1$, definida por $id(x) = x$. La función id tiene el grado 1, y por lo tanto el teorema 9.9 implica que la id no se puede extender a una función continua definida en D, una contradicción. Por lo tanto, no hay retracción de D a S^1.

TEOREMA 10.2. EL TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER EN DOS DIMENSIONES. Cada función continua $f : D \to D$, la asignación del disco a sí mismo tiene un punto fijo.
Como ya se indicó, nuestro enfoque para probar este teorema es mostrar su equivalencia con el Teorema de No Retracción Bidimensional. Eso se hace mediante el siguiente teorema:

TEOREMA 10.3. El disco D, como subespacio de R^2, tiene la propiedad de punto fijo si y solo si no hay retracción desde D en su límite S^1.

3 Ejercicios

10.2. Demuestre que si un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo, entonces X es conexo.
Solución: Probaremos la contrapositiva. Suponer X, espacio topológico que no es conexo. Entonces, hay conjuntos abiertos disjuntos no vacíos $A, B \subset X$ tal que $X = A \cup B$. Luego hay elementos $a \in A$ y $b \in B$ y podemos definir una función $f : X \to X$ por $f(x) = a$, cuando $x \in B$, $f(x) = b$, cuando $x \in A$.
Ya que $A \cap B = \oslash$ y $A \cup B = X$, la función f está bien definida. También, $a \notin B$ y $b \notin A$, asi que F no tiene un punto fijo.

10.3. Demuestre que si X tiene la propiedad de punto fijo y Y es homeomorfo a X, entonces Y tiene la propiedad de punto fijo.
Solución: Sea X con propiedad del punto fijo y sea $\varphi : X \to Y$ homeomorfismo, sea $f : Y \to Y$ es una función continua $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : X \to X$ por ser composición de funciones continuas, y tiene un punto fijo en $x \in X$, entonces $\varphi(x)$ es igual punto fijo de f. Por lo que Y tiene la propiedad de punto fijo.

10.4. Demuestre que si X tiene la propiedad de punto fijo y A es una retracción de X, entonces A tiene la propiedad de punto fijo.
Solución: Denotamos a la inclusion de A en X como i, Sea $f : A \to A$ continua, necesitamos probar que f tiene un punto fijo en A. Sea $g : i \circ f \circ r : x \to X$ que primero hace un retracto a A, luego aplica f y ve el resultante como un elemento de X, g es continua pues es composición de funciones continuas, entonces g tiene un punto fijo $x \in X$ tal que $g(x) = x$, pero por construcción $g(x) \in A$ entonces $x \in A$ y $r(x) = x$ entonces $x = g(x) = f(r(x)) = f(x)$. Así pues $x \in A$ es punto fijo.

10.5. Demuestre que si X no tiene la propiedad de punto fijo, entonces para todo Y, el espacio de producto X x Y no tiene la propiedad de punto fijo.
Solución: Por contradicción, supongamos que se cumplen las hipótesis y que $X \times Y$ tiene la propiedad del punto fijo, sabemos que $X \times y_0$ es retracto de $X \times Y$ por lo tanto $X \times y_0$ tiene la propiedad del punto fijo, pero a su vez, $X \times y_0$ es homeomorfo a X el cual por hipótesis no tiene la propiedad del punto fijo, lo cual es una contradicción con el ejercicio 10.4.
Por lo tanto, $X \times Y$ no tiene la propiedad del punto fijo.

4 Teorema de Brouwer usando la noción de grado

En estos ejercicios, desarrollamos otra prueba del teorema del punto fijo de Brouwer bidimensional. En este caso, la prueba se basa directamente en el grado de funciones circulares y no se basa en el teorema de no retracción. En lo que sigue, suponemos que los puntos $x \in S^1, D$, y así sucesivamente, son vectores partiendo en el origen en el plano. Comenzamos con un lema:

LEMA 10.4. Sea $g : S^1 \to R^2 - (0)$ continua, y suponga que la función $h : S^1 \to S^1$, definida por $h(x) = \frac{g(x)}{|g(x)|}$ tiene grado$\neq$1. Entonces existe $x \in S^1$ tal que $g(x) = ax$ para algun $a > 0$.
Solución: Definamos $G : S^1 \times [0,1] \to R^2$ como $G(x,t) = (1-t)g(x) - t(x)$ G define una homotopía de líneas entre la función g a la función $a(x) = -x$, que mapea a cualquier $x \in S^1$ a su antipodal $-x \in S^1$.
Ahora debemos probar que existe un $(x,t) \in S^1 \times (0,1)$ tal que G(x,t)=0 (Hint:Suponga que no lo hay, y considere la homotopía de círculos $H(x,t)$: $S^1 \times (0,1)$, definida como $H(x,t) = \frac{G(x,t)}{|G(x,t)|}$)

Entonces, supongamos que no existe $(x,t) \in S^1 \times (0,1)$ tal que $G(x,t) = 0$ y consideremos $H(x,t) : S^1 \times (0,1) \to S^1$ definida por:
$H(x,t) = \frac{G(x,t)}{|G(x,t)|}$ lo cual define una homotopía entre h(x) y -x, pero por hipótesis deg(h)≠1 y deg(-x)=1.
Luego ya teniendo el punto (x,t) que satisface G(x,t)=0 probar que g(x)=ax para algun a¿0, y como consecuencia probar el teorema.
Para esto, sea (x,t) que satisface G(x,t)=0, entonces (1-t)g(x)-tx=0 lo que equivale a que $g(x) = \frac{t}{1-t} * x$ y $\frac{t}{1-t} > 0$ pues $t \in (0,1)$. Por lo tanto, el teorema se cumple.

Las funciones del círculo no necesariamente tienen puntos fijos. Una simple rotación de un círculo por π no deja ningún punto fijo. Esta función de rotación tiene un grado 1. Curiosamente, ese es el único grado para el cual una función circular no puede tener un punto fijo. Para las funciones del círculo cuyo grado no es igual a 1, tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 10.5. Sea $f : S^1 \to S^1$ funcion circular con grado distinto de 1. Entonces existen x_1, x_2 tal que $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = -x_2$.

Por lo tanto, si el grado de una función de círculo no es igual a 1, entonces la función tiene un punto fijo y un punto que se asigna a su punto antipodal.

Para su demostración tenemos un Hint: considerar a $f : S^1 \to S^1$ una función que mapea en $R^2 - (0)$, usar el lema 10.4 para probar la existencia de un punto fijo. Luego conisderar la función $h : S^1 \to S^1$ definida como h(x)=f(-x)y luego aplicar la primera afirmación del teorema a h.
Primero, sea $f : S^1 \to S^1$ y $f^* : S1 \to R^2 - 0$ supongamos que $h : S^1 \to S^1$ definida como $h(x) = \frac{f^*(x)}{|f^*(x)|} = f(x)$ por definición de f y f^* ahora, como f=h, entonces deg(f)=deg(h) así pues, utilizando la hipótesis, $deg(h) \neq 1$, así cumple con las hipótesis del Lema 10.4. entonces existe $x_0 \in S^1$ tal que $f^*(x_0) = ax_0$ entonces $\frac{f^*(x_(0))}{|f^*(x_0)|} = \frac{ax_0}{a} = x_0$ y $\frac{f^*(x_(0))}{|f^*(x_0)|} = f(x_0)$, entonces $f(x_0) = x_0$. Por lo $quex_0$ es punto fijo de f.
Ahora, consideremos $g : S^1 \to S^1$ definida por $g(x) = f(-x)$ y sea $g^*(x) : S^1 \to R^2 - 0$ y definimos $h(x) = \frac{g^*(x)}{|g^*(x)|} = g(x)$ por la definición de g, ahora deg(g)=deg(h)=deg(f)$\neq$ 1, asi que por el Lema 10.4, existe $x_1 \in S^1$ tal que $g^*(x_1) = ax_1$ que similar a lo anterior se cumple que $\frac{g^*(x_(1))}{|g^*(x_1)|} = \frac{ax_1}{a} = x_1$ y $g(x_1) = h(x_1) = \frac{g^*(x_(1))}{|g^*(x_1)|} = x_1$ por lo que $g(x_1) = x_1$ y esto equivale a que $f(-x_1) = -(-x_1)$ Por lo tanto, x_1 es el punto mandado a su antipodal.

Ahora, procedemos con el teorema del punto fijo de Brouwer bidimensional. Sea D, disco en el plano.

TEOREMA 10.6. Sea $f : D \to D$ una función continua. Entonces existe $x \in D$ tal que f(x)=x.

Solución: Supongamos que no existe $x \in D$ tal que f(x)=x. Sea $k : D \to R^2 - 0$ la función definida por k(x)=f(x)-x. La función k mapea a $R^2 - 0$ dado que f no tiene punto fijo.

Ahora, tenemos que indicar porque se cumple el Lema 10.4 a la funcón $k|_{S^1}$: $S^1 \to R^2 - 0$ (Hint: Pruebe que el grado de la función circular es 0)
Definimos una función $h(x) = \frac{k(x)}{|k(x)|}$, falta demostrar que deg(h)=1.
Entonces existiría $x^* \in S^1$ tal que $k(x^*) = ax^*$ para algún a¿0.

Despues, basta probar que $f(x^*) \in D$, por lo que llegaríamos a una contradicción, completaríamos nuestra prueba del teorema.