Teorema de Bursuk-Ulam

Sofia Ibarra

May 27, 2018

- **Definición** Una función circular f:$S^1 \to S^1$ es **antipodal** si f mapea puntos antipodales a puntos antipodales. Si vemos a f como una función de valores complejos, $\forall$ z$\in S^1$ tenemos que f(-z)=-f(z). Cuando la función circular f se representa como un mapeo f:$[0,2\pi] \to S^1$ tal que f(0)=f(2π), entonces la función antipodal f debe satisfacer f($\theta + \pi$)=-f(θ)
- **Teorema 9.31** Sea f:$[0,2\pi] \to S^1$ una función circular y sea $f^*:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ un levantamiento de f. Entonces $f^*(2\pi)$-f^*=2πgrad(f)
- **Teorema 9.9** Una función circular f:$S^1 \to S^1$ tiene grado 0 si y sólo si f se extiende a una función continua en el disco D (esto es, ssí existe una función continua F:$D \to S^1$ tal que F(x)=f(x) $\forall$ x$\in S^1$)

Asuma que f:[0,2π]$\rightarrow$S^1 es una función antipodal y sea $f^{*}\rightarrow\mathbb{R}$ un levantamiento de f. Pruebe que

$$\text{Existe } n\in\mathbb{Z} \text{ tal que } f^{*}(\theta+\pi)= f^{*}(\theta)+(2n+1)\pi$$

- Tenemos que p: $\mathbb{R}\rightarrow$S^1 con $p(\theta)$=$e^{i\theta}$=isen(θ).
- Entonces, -$e^{i\theta}$=$e^{-i\theta}$, ya que isen(-θ)=-isen(θ) puesto que sen(x) es una función impar.
- Por lo tanto, p(-θ)=-p(θ).

Sabemos que p(-θ)=-p(θ), consideremos ahora $p\circ f^{*}(\theta+\pi)$

- $p\circ f^{*}(\theta+\pi)$= f($\theta+\pi$)
- f($\theta+\pi$)=-f(θ)
- -f(θ)=-$p\circ f^{*}(\theta)$
- -$p\circ f^{*}(\theta)$=$p\circ$(-$f(\theta)$)

Como $p \circ f^*(\theta+\pi) = p \circ (-f^*(\theta))$, entonces, por la misma definición de p, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f^*(\theta+\pi) - (-f^*(\theta)) = 2\pi n$$

Entonces

$$f^*(\theta+\pi) = 2\pi \mathrm{n} - f^*(\theta) = 2\pi \mathrm{n} + \pi + f^*(\theta)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Pruebe que $f^*(2\pi) \neq f^*(0)$ y concluya que las funciones antipodales tienen grado distinto de cero.

D Por el Teorema 9.31, sabemos que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^*(2\pi)$-$f^*(0)$=2πn y que además n=grad(f). Demostraremos que ese n es diferente de 0.
Por el teorema anterior, sabemos que

- $f^*(\pi)=f^*(0+\pi)$
- $f^*(0+\pi)=f^*(0)+(2n+1)\pi$, por lo que
- $f^*(0)=f^*(\pi)-(2n+1)\pi$

.Por otro lado, tenemos que

- $f^*(2\pi){=}f^*(\pi+\pi)$
- $f^*(\pi+\pi){=}f^*(\pi){+}(2\mathrm{n}{+}1)\pi$

de lo cual podemos concluir que $f^*(2\pi){\neq}f^*(0)$, y así tenemos que el grado de f es distinto de cero, puesto que *n* es distinto de cero.

Demuestre que no hay ninguna función continua antipodal $f{:}S^2 \to S^1$

Sea S^+ el hemisferio superior de la esfera incluyendo el ecuador, es decir $S^+ = x^2 + y^2 + z^2 \mid z \geq 0$.
Tenemos que el disco cerrado D es homeomorfo a S^+ mediante el homeomorfismo $G{:}D \to S^+$

$$G(x_0,y_0,0)=(x_0,y_0,\sqrt{1\text{-}({x_0}^2+{y_0}^2)})$$

Como $(x_0,y_0,0) \in D$, ${x_0}^2+{y_0}^2 \leq 1$, por lo que $\sqrt{1\text{-}({x_0}^2+{y_0}^2)}$ existe y está bien definida. Además, notemos que $G_{S^1}=I_{S^1}$ (identidad en S^1), ya que si $(x_0,y_0,0) \in S^1$, ${x_0}^2+{y_0}^2=1$, lo que implica que $G(x_0,y_0,0)=(x_0,y_0,0)$.

Ahora supongamos que existe f:$S^2 \to S^1$ antipodal y continua. Consideremos pues f_{S^1}, que es una función circular y antipodal. Notemos que $f \circ G: D \to S^1$ es una extensión de f_{S^1}, ya que $f \circ G_{S^1} = f \circ I_{S^1} = f_{S^1}$ (ya que $G_{S^1} = I_{S^1}$). Por lo tanto f_{S^1} tiene una extensión, lo que implica, por el teorema 9.9, que f_{S^1} tiene grado cero. Pero f_{S^1} no puede tener grado cero por ser una función antipodal. Por lo tanto, f no existe.

Teorema de Bursuk-Ulam: Sea f:$S^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que existe x$\in S^2$ tal que f(x)=-f(x).

Primero, supongamos que no existe tal x$\in S^2$ tal que f(x)=f(-x). Consideremos la función h(x)=$\frac{f(x)-f(-x)}{|f(x)-f(-x)|}$, con h:$S^2 \to S^1$. Como no existe x$\in S^2$ tal que f(x)=f(-x), la función h está bien definida y es continua.

Podemos ver que

- -h(x_0)=$\frac{-f(x_0)+f(-x_0)}{|f(x_0)-f(-x_0)|}$=
- $\frac{f(-x_0)-f(-x_0)}{|f(-x_0)-f(-x_0)|}$=
- h(-x_0)

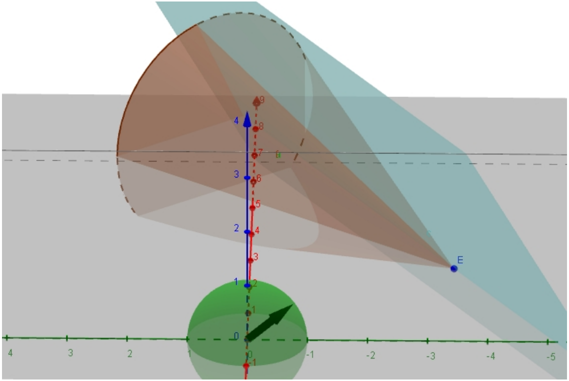
por lo que h es una función antipodal, pero además es una función continua h:$S^2 \to S^1$, lo cual implica una contradicción con el teorema anterior.

Por lo tanto, existe x$\in S^2$ tal que f(x)=-f(x)

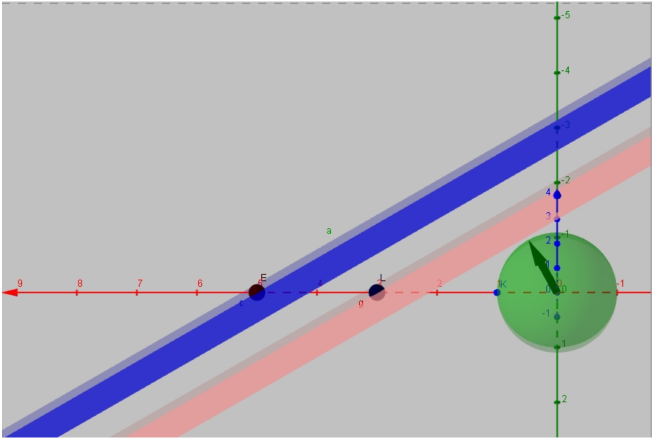
Teorema del Sándwich de jamón

El Teorema del Sándwich de jamón afirma que para tres sólidos *a*,*b*,*c* en $\mathbb{R}^3$, cualesquiera que éstos sean, existe un plano en $\mathbb{R}^3$ que corta simultáneamente a los tres sólidos por la mitad. Para demostrarlo necesitaremos varios resultados previos.
Sea x$\in$S^2 fijo y sea *a* un sólido fijo. Tomaremos a x como un vector unitario en $\mathbb{R}^3$, con dirección y sentido. Ahora consideremos todos los planos P(x) que tienen como vector normal a x y sea f:P(x)$\rightarrow$[0,1] definida de la siguiente manera:

f(p(x))=V$_p$, donde V$_p$ es el porcentaje de volumen del sólido *a* que yace en el lado de p(x) en la dirección del vector normal x.


E

Queremos ver que la función f es sobreyectiva. Notemos que cada plano p(x), al tener como vector normal a x, queda determinado de manera única por un punto en $\mathbb{R}\times 0$, por lo cual por cada punto en $\mathbb{R}\times 0$ hay un único plano p(x).



Por lo cual, si suponemos que f no es sobreyectiva, es decir, que existe y en [0,1] tal que y no tiene preimagen en P(x), entonces eso implicaría que la cardinalidad de [0,1] es más grande que la cardinalidad de $\mathbb{R}\times 0 \cong \mathbb{R}$, lo cual no puede ser.
Teniendo que f es sobreyectiva sabemos, pues, que existe un plano $p_1(x)$ tal que $f(p_1(x))=\frac{1}{2}$, lo implica que $p_1(x)$ corta a *a* por la mitad. Similarmente, sabemos que existen planos $p_2(x)$ y $p_3(x)$ que cortan a *b* y *c* por la mitad, respectivamente.

Definimos la función $d_1(x)$ como sigue:

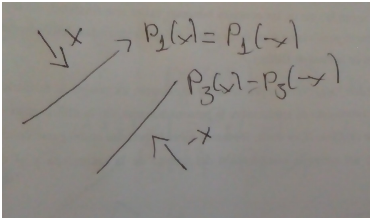
- $d(P_3(x),P_1(x))$ si $P_1(x)$ yace en el lado de $P_3(x)$ en dirección de vector normal x.
- - $d(P_3(x),P_1(x))$ si $P_1(x)$ yace en el lado de $P_3(x)$ en la dirección opuesta del vector normal x.

Definimos la función $d_2(x)$ de la misma manera que la función $d_1(x)$, excepto que $d_2(x)$ considera los planos $P_3(x)$ y $P_2(x)$.
De esta manera, ya podemos definir la función $d(x)=(d_1(x),d_2(x))$.
Notemos que $d:S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Proposición: d(-x)=-d(x) $\forall x \in S^2$

Primero demostraremos que $d_1(x)=d_1(-x)$. Consideremos $P_1(x)$ y $P_1(-x)$. $P_1(x)$ y $P_1(-x)$ son paralelos porque sus vectores normales son paralelos, y co,o además ambos cortan a *a* por la mitad, podemos decir que $P_1(x)=P_1(-x)$. De igual modo podemos afirmar que $P_3(x)=P_3(-x)$.

- Caso 1): $d_1(x)\geq 0$, lo que implica que $P_1(x)$ yace en el lado de P_3 en dirección del vector normal x. Como $P_1(x)=P_1(-x)$ y $P_3(x)=P_3(-x)$, eso quiere decir que $P_1(-x)$ yace en el lado de $P_3(-x)$ en dirección contraria del vector normal -x, como ilustra la siguiente imagen. De lo cual tenemos que $d_1(-x)=-d_1(x)$



- Caso 2): $d_1(x) \leq 0$. Se demuestra de manera análoga al caso 1

Ya tenemos que $d_1(-x)=d_1(x)$. La demostración de que $d_2(-x)=-d_2(x)$ es igual que que la demostración de que $d_1(-x)=-d_1(x)$, por lo cual se obtiene que $d(-x)=-d(x)$
Ahora, recordemos que $d: S^2 \to \mathbb{R}^2$, por lo cual, aplicando el Teorema de Bursuk-Ulam, sabemos que existe $x_0 \in S^2$ tal que $d(x_0)=d(-x_0)$, así que:

- $d(x_0)=d(-x_0)$, por el Teorema de Bursuk-Ulam
- $d(-x_0)=-d(x_0)$ por la proposición anterior
- $d(x_0)=-d(x_0)$, lo que implica que $d(x_0)=(0,0)$

De aquí se sigue el Teorema del Sándwich de Jamón, ya que hemos demostrado que existe un punto x_0, tal que $d(x_0)=(0,0)$, lo que significa que $P_1(x_0)=P_2(x_0)=P_3(x_0)$. Recordemos que $P_1(x_0)$ corta a *a* por la mitad, $P_2(x_0)$ corta a *b* por la mitad y $P_3(x_0)$ corta a *c* por la mitad.