El morfismo transfert y sus aplicaciones

Sofía Ibarra
Materia: Homología

Universidad Autónoma de Zacatecas

June 4, 2019

Contenido

Introducción

Uno de los principales objetivos de la homología es deducir características de los espacios topológicos usando módulos de homología. Para calcular dichos módulos, tenemos varias herramientas a nuestra disposición; en particular, si tenemos una función continua $f : X \to Y$, es posible conocer algunas cosas de la homología de Y a partir de la homología de X mediante el morfismo de cadena S_f inducido por f. No obstante, tal vez no conozcamos la homología de X, pero sí la de Y. Qué podemos decir entonces? Cuando f es una función muy especial conocida como *proyección central*, podemos deducir ciertas características de la homología de X a través de la homología de Y y un morfismo llamado *transfert*.

En esta presentación exploraremos las propiedades de dicho morfismo y sus aplicaciones, algunas de las cuales van más allá del cálculo de la homología.

Proyecciones cubrientes

Sean X, E espacios arcoconexos y localmente arcoconexos. Una **proyección cubriente** $p : E \to X$ es una función continua que cumple que $\forall x \in X$, existe una vecindad U_x con $x \in U_x$ tal que

$$p^{-1}(U_x) = \sqcup_i U_i$$

donde $p\mid_{U_i}: U_i \to U$ es un homeomorfismo
El espacio E se conoce como **espacio total**, X es llamado **espacio base**, la vecindad U_x es un abierto **especial**, los abiertos U_i son las **hojas** de la proyección y $p^{-1}(x)$ es la **fibra** de x. Una característica importante de las proyecciones cubrientes es que $p^{-1}(x)$ es un espacio discreto $\forall x \in X$.
Un ejemplo de proyección cubriente es la función $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = (cos(t), sen(t))$

Propiedades de proyecciones cubrientes

- Sea $\mid p^{-1}(U) \mid$ el número de hojas sobre la vecindad especial U. Tenemos pues que para $x, y \in X$, $\mid p^{-1}(U_x) \mid = \mid p^{-1}(U_y) \mid$. Si $\mid p^{-1}(U_x) \mid = s$, se dice que p es una proyección a **s** hojas.
- $p_*(\pi_1(E, y)) \leq \pi_1(X, x)$. Si $p_*(\pi_1(E, y))$ es un subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$, se dice que la proyección p es **de Galois**.
- Si el espacio total E es simplemente conexo, se dice E es la cubierta universal, puesto que para cualquier otro espacio D que cubra a X mediante la proyección $q : D \to X$, existirá una proyección cubriente $f : E \to D$.
- Sea $p : E \to X$ proyección cubriente y $f : Y \to X$ una función continua tal que $f(y_0) = x_0$. Sea $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$. Entonces existe una única función continua $\hat{f} : Y \to X$ tal que $\hat{f}(y_0) = \widetilde{x_0}$ y $p \circ \hat{f} \iff f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(E, \dot{x}))$. Esta propiedad se conoce como **Teorema del levantamiento**

Grupo de automorfismos de una proyección cubriente

Sea $p : E \to X$ una proyección cubriente y sea $h : E \to E$ un homeomorfismo. Decimos que h es **compatible** con la proyección p si para cualquier $x \in X$ y $a \in p^{-1}(x), h(a) \in p^{-1}(x)$, es decir, h manda fibras a fibras. El grupo formado por todos los isomorfismos $h : E \to E$ compatibles con la proyección p se conoce como el **grupo de automorfismos de la proyección cubriente p** y se denota como $Aut(p)$

Theorem

Sea $p : E \to X$ una proyección de Galois. Entonces $\frac{\pi_1(X,x)}{p_*(\pi_1(E,y))} \cong Aut(p)$ $\forall x \in X, y \in p^{-1}(x)$

Theorem

Si E es la cubierta universal de X, $\pi_1(X,x) \cong Aut(p)$

El morfismo transfert

Sea $p : E \to B$ una proyección cubriente a s hojas. Para cada función continua $\sigma : \Delta^q \to B$ y cada $a \in p^{-1}(\sigma(e_1))$, denotamos por σ_a al levantamiento de σ que verifica $\sigma_a(e_1) = a$.
Definimos pues una función $T : S_*(B, R) \to S_*(E, R)$ de la siguiente manera:

$$T(\sigma) = \Sigma_a \sigma_a$$

donde la suma corre sobre todos los puntos a tal que $a \in p^{-1}(\sigma(e_1))$ La función T es llamada **transfert**

Propiedades del morfismo transfert

♡

T es una función inyectiva

Sean $\sigma, \theta \in S_q(B, r)$ tal que $\sigma \neq \theta$. Eso quiere decir que existe $x \in \Delta^q$ tal que $\sigma(x) \neq \theta(x)$. Por lo tanto, si σ_a, θ_b son levantamientos cualesquiera de σ y θ respectivamente, $\sigma_a \neq \theta_b$, puesto que si $\sigma_a = \theta_b$, tenemos

$$p(\sigma_a(x)) = p(\theta_b(x)) \rightrightarrows \sigma(x) = \theta(x)$$

lo que implica una contradicción

♡

Si p es una proyección a s hojas, $S_p \circ T(\sigma) = s \cdot \sigma$

Puesto que $T(\sigma) = \Sigma_a \sigma_a$, donde σ_a es levantamiento de σ, y dado que σ tiene exactamente s levantamientos distintos,
$S_p \circ T(\sigma) = p(\Sigma_a \sigma_a) = \Sigma_a p(\sigma_a) = s \cdot \sigma$

♡

T es un morfismo de complejos de cadena

Basta ver que si $\varepsilon^i : \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ es la inyección de una cara, entonces

$$T(\sigma \circ \varepsilon^i) = \Sigma_a(\sigma_a \circ \varepsilon^i) = T(\sigma) \circ \varepsilon^i$$

puesto que si $T(\sigma \circ \varepsilon^i) = T(\sigma) \circ \varepsilon^i$, entonces

$$\Sigma_{i=1}^n T(\sigma \circ \varepsilon^i) = \Sigma_{i=1}^n (T(\sigma) \circ \varepsilon^i) = \delta(T(\sigma))$$

$$T(\Sigma_{i=1}^n \sigma \circ \varepsilon^i) = \delta(T(\sigma))$$

$$T(\delta(\sigma)) = \delta(T(\sigma))$$

Por definición, $T(\sigma \circ \varepsilon^i) = \Sigma_b(\sigma \circ \varepsilon^i)_b$, es decir, $T(\sigma \circ \varepsilon^i)$ es la suma de los s levantamientos distintos de $\sigma \circ \varepsilon^i$.
Por otro lado, σ tiene s levantamientos distintos: $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_s$. Notemos que $p(\sigma_j \circ \varepsilon^i) = (p \circ \sigma_j) \circ \varepsilon^i = \sigma \circ \varepsilon^i$, por lo que $\sigma_j \circ \varepsilon^i$ es un levantamiento para $\sigma \circ \varepsilon^i$, y de esta manera $\sigma_1 \circ \varepsilon^i, \sigma_2 \circ \varepsilon^i, ..., \sigma_s \circ \varepsilon^i$ son s levantamientos distintos para $\sigma \circ \varepsilon^i$.
Como $\sigma \circ \varepsilon^i$ tiene únicamente s levantamientos distintos

$$T(\sigma \circ \varepsilon^i) = \Sigma_b(\sigma \circ \varepsilon^i)_b = \Sigma_j(\sigma_j \circ \varepsilon^i) = T(\sigma) \circ \varepsilon^i$$

El morfismo transfert e isomorfismos en homología

Consideremos el caso de la proyección $p : E \to B$, donde E es la cubierta universal y $\pi_1(B)$ es finito.
Puesto que $p : E \to B$ es la cubierta universal, $Aut(p) \cong \pi_1(B)$. De esto, es posible definir una acción $\star : \pi_1(B) \times S_q(E, \mathbb{Q}) \to S_q(E, \mathbb{Q})$ "compatible" con el diferencial, es decir $\delta(\alpha \star \sigma) = \alpha \star \delta(\sigma)$*. Así, $\pi_1(B)$ actúa también sobre $H_q(E)$. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema:

Theorem

Para todo $n \geq 0$, el morfismo transfert induce un isomorfismo de espacios vectoriales $T : H_n(B, \mathbb{Q}) \to H_n(E, \mathbb{Q})^{\pi_1(B)}$, donde $H_n(E, \mathbb{Q})^{\pi_1(B)}$ es el subespacio de $H_n(E, \mathbb{Q})$ formado de elementos invariantes bajo la acción de $\pi_1(B)$

- Inyectividad: Ya tenemos que T es una función inyectiva
- Sobreyectividad: por demostrar que $Im(T) = S_*(E, \mathbb{Q})^{\pi_1(B)}$.

Si $\sigma \in S_*(B, \mathbb{Q})$ y σ_b es un levantamiento de σ, los otros levantamientos de σ se obtienen de σ_b mediante la acción de $\pi_1(B)$, de donde tenemos

$$T(\sigma) = \Sigma_a \sigma_a = \Sigma_{g \in \pi_1(B)} g \cdot \sigma_b$$

$T(\sigma)$ es invariante bajo la acción de $\pi_1(B)$, ya que si
$g_1 \in \pi_1(B), g_1 \cdot \pi_1(B) = \pi_1(B)$, por lo que
$g \cdot (\Sigma_{g \in \pi_1(B)} g \cdot \sigma_b) = \Sigma_{\sigma \in \pi_1(B)} (g_1 \cdot g)\sigma_b = \Sigma_{g \in \pi_1(B)} g \cdot \sigma_b$.
Por lo tanto $Im(T) \subseteq S_q(E, \mathbb{Q})^{\pi_1(B)}$
Recíprocamente, sea $\mu \in S_*(E, \mathbb{Q})^{\pi_1(B)}$, es decir, $g \cdot \mu = \mu \; \forall g \in \pi_1(B)$.
Entonces $T(p \circ \mu) = \Sigma_{g \in \pi_1(B)} g \cdot \mu = \mid \pi_1(B) \mid \mu$ (ya que μ es levantamiento de $p \circ \mu$), por lo que $T(\frac{1}{|\pi_1(B)|} p \circ \mu) = \mu$ y así $\mu \in Im(T)$, por lo que $S_*(E, \mathbb{Q})^{\pi_1(B)} \subseteq Im(T)$ entonces $Im(T) = S_*(E, \mathbb{Q})^{\pi_1(B)}$

Teorema

Sea (C_*, δ) un complejo de cadenas definido sobre un campo de característica cero y G un grupo finito. Supongamos que G actúa sobre cada C_n y que $d(g \cdot x) = g \cdot (\delta(x))$, de tal manera que G actúe también sobre $H_n(C)$ y que el subespacio de cadenas invariantes forme un subcomplejo (C_*^G, δ) de (C_*, δ). Entonces la inclusión $i : (C_*^G, \delta) \to (C_*, \delta)$ induce un isomorfismo $H_n(i) : H_n(C_*^G) \to [H_n(C^*)]^G$

Recordemos que $\forall x \in C$, el elemento $\frac{1}{|G|}\Sigma_{g \in G} g \cdot x$ es invariante bajo la acción de G. Además, $[0] \in [H_n(C^*)]^G$.

- **Inyectividad**: Sea $[a] \in H_n(C^G)$ tal que $H_n(i)[a] = [i(a)] = [a] = [O]$ en $[H_n(C^*)]^G$. Por demostrar $[a] = [0]$ en $H_n(C_*^G)$.
  Si $[a] = 0$ en $[H_n(C^*)]^G$, entonces $a = \delta(b), b \in (C_*, \delta)$. Como $a \in C_*^G, g \cdot a = a \, \forall g \in G$, por lo que $g \cdot a = g \cdot \delta(b)$ implica que $a = g \cdot \delta(b)$ y así $a = \delta(\frac{1}{|G|}\Sigma_{g \in G} g \cdot b)$. Dado que $\frac{1}{|G|}\Sigma_{g \in G} g \cdot b \in C^G, [a] = [0]$ en $H_n(C^G)$
- **Sobreyectividad**: Sea $[a] \in [H_n(C_*)]^G$, por lo que $g \cdot [a] = [a] = [g \cdot a]$. Así, $[a] = [\frac{1}{|G|}\Sigma_{g \in G} g \cdot a]$, con $[\frac{1}{|G|}\Sigma_{g \in G} g \cdot a] \in H_n(C^G)$.

Homología de espacios proyectivos reales

Si p es una proyección cubriente a dos hojas, la sucesión

$$\clubsuit : 0 \to S_*(B, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{T} S_*(E, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{S(p)} S_*(B, \mathbb{Z}_2) \to 0$$

es una sucesión exacta de complejos de cadenas*, por lo que induce una sucesión exacta en homología:

$$... \to H_q(B) \xrightarrow{H_q(T)} H_q(E) \xrightarrow{H_q(p)} H_q(B) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(B) \to ...$$

que nos permitirá calcular la homología de algunos espacios

Teorema

La homología de los espacios proyectivos reales con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ está dada por:

$$H_q(P_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si} \quad 0 \leq q \leq n \\ 0 & \text{si} \quad q > n \end{cases}$$

Puesto que $P_n(\mathbb{R}) \cong P_{n-1}(\mathbb{R}) \cup_{q_{n-1}} e^n$, (donde $q_{n-1} : S^{n-1} \to P_{n-1}(\mathbb{R})$ es la proyección canónica), $P_n(\mathbb{R})$ no tiene q células para $q > n$, por lo tanto $H_q(P_n(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = 0$ para $q > n$.

Para la proyección canónica a dos hojas $p : S^n \to P_n(\mathbb{R})$, la función transfert nos proporciona una sucesión exacta en homología con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$

$$... \to H_q(S^n) \to H_q(P_n(\mathbb{R})) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(P_n(\mathbb{R})) \to H_{q-1}(S^n) \to ...$$

que se termina en

$$H_1(P_n(\mathbb{R})) \xrightarrow{\delta_1} H_0(P_n(\mathbb{R})) \xrightarrow{H_0(T)} H_0(S^n) \xrightarrow{H_0(p)} H_0(P_n(\mathbb{R})) \to 0$$

Puesto que $H_0(p)$ es un isomorfismo*, $H_0(P_n(\mathbb{R})) \cong \ H_0(S^n) \cong mathbbZ_2$.Ade
$H_0(T) = \overrightarrow{0}$. Por otra parte, como

$$H_q(S^n, \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{si} \quad q = 0, n \\ \\ 0 & \text{si} \quad q \neq n, 0 \end{cases}$$

para $0 < q < n$,δ_q es un isomorfismo en estos grados, ya que esta parte de la sucesión es exacta:

$$0 \to H_q(P_n(\mathbb{R})) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(P_n(\mathbb{R})) \to 0$$

y de esta manera

$$H_{n-1}(P_n(\mathbb{R})) \cong H_{n-2}(P_n(\mathbb{R})) \cong ... \cong H_1(P_n(\mathbb{R})) \cong H_0(P_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$$

En grado n tenemos la sucesión exacta

$$0 \to H_n(P_n(\mathbb{R})) \to H_n(S^n) \to H_n(P_n(\mathbb{R})) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(P_n(\mathbb{R})) \to 0$$

que es en realidad la sucesión exacta

$$0 \to H_n(P_n(\mathbb{R})) \to \mathbb{Z}_2 \to H_n(P_n(\mathbb{R})) \xrightarrow{\delta_n} \mathbb{Z}_2 \to 0$$

lo que implica que $dim(H_n(P_n)(\mathbb{R})) = 2$*

Teorema de Borsuk-Ulam

Theorem

Si $m \geq n \geq 1$, no existe una función continua $f : S^m \to S^n$ que verifique $f(-x) = -f(x) \forall x \in S^m$

Supongamos la existencia de una tal función f.
Definimos entonces $\hat{f} : P_m(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ como $\hat{f}[x] = [f(x)]$. La función $\hat{f}$ está bien definida, ya que

$$\hat{f}[x] = [f(x)] = [-f(x)] = [f(-x)] = \hat{f}[-x]$$

Por lo tanto, tenemos el diagrama siguiente (1)

$$\begin{tikzcd}
S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_m"'] & S^n \arrow[d, "p_n"] \\
P_m(\mathbb{R}) \arrow[r, "\hat{f}"] & P_n(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

que es conmutativo, ya que $p_n(f(x)) = [f(x)]$ y $\hat{f}(p_m(x)) = \hat{f}[x] = [f(x)]$

Por otro lado, las proyecciones $p_n : S^n \to P_n(\mathbb{R})$ y $p_m : S^m \to P_n(\mathbb{R})$ son proyecciones cubrientes a 2 hojas que admiten funciones transfert

$$T_n : S_*(P_n(\mathbb{R})) \to S_*(S^m)$$

$$T_m : S_*(P_m) \to S_*(S^m)$$

lo que nos da otro diagrama (2) :

$$\begin{tikzcd} S_*(P_m(\mathbb{R})) \arrow[r, "S_*(\hat{f})"] \arrow[d, "T_m"'] & S_*(P_n(\mathbb{R})) \arrow[d, "T_n"] \\ S_*(S^m) \arrow[r, "S_*(f)"] & S_*(S^n) \end{tikzcd}$$

Afirmación: El diagrama anterior es conmutativo

Por un lado, consideremos $S_*(f) \circ T_m(\sigma)$. Puesto que $\sigma \in S_*(P_m(\mathbb{R}))$, $T_m(\sigma) = \sigma_a + \sigma_b$, donde σ_b se obtiene de σ_a mediante la composición de la función antipodal A, es decir, $\sigma_b = A \circ \sigma_a$, y se sigue que

$$S_*(f) \circ T_m(\sigma) = f \circ \sigma_a + f \circ A \circ \sigma_a = f \circ \sigma_a + A \circ f \circ \sigma_a$$

Por otro lado, $T_n(S_*(\hat{f}))(\sigma) = T_m(\hat{f}(\sigma)) = \hat{f}(\sigma)_1 + \hat{f}(\sigma)_2$ (con $\hat{f}(\sigma)_1, \hat{f}(\sigma)_2$ levantamientos de $\hat{f}(\sigma)$), donde $\hat{f}(\sigma)_2$ se obtiene de $\hat{f}(\sigma)_1$ mediante la composición con la función antipodal, es decir, $\hat{f}(\sigma)_2 = A \circ \hat{f}(\sigma)_1$.

Tenemos que $f \circ \sigma_a$ es un levantamiento para $\hat{f}(\sigma)$, ya que, por el diagrama (1)

$$p_n \circ f \circ \sigma_a = \hat{f} \circ p_m \circ \sigma_a = \hat{f} \circ \sigma$$

entonces $f \circ \sigma_a$ es un levantamiento para $\hat{f}(\sigma)$ y de esta manera $A \circ f \circ \sigma_a$ es también un levantamiento para $\hat{f}(\sigma)$, y así

$$T_m(\hat{f}(\sigma)) = \hat{f}(\sigma)_1 + \hat{f}(\sigma)_2 = f \circ \sigma_a + A \circ f \circ \sigma_a = S_*(f)(T_m(\sigma))$$

y por tanto el diagrama anterior es conmutativo

El diagrama (1) induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} S_*(S^m) \arrow[r, "S_*(f)"] \arrow[d, "S_*(p_m)"'] & S_*(S^n)) \arrow[d, "S_*(p_n)"] \\ S_*(P_m(\mathbb{R})) \arrow[r, "S_*(\hat{f})"] & S_*(P_n(\mathbb{R})) \end{tikzcd}$$

por lo cual, junto con el diagrama (2), tenemos un diagrama conmutativo de sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S_*(P_m(\mathbb{R})) \arrow[r, "T_m"] \arrow[d, "S_*(\hat{f})"'] & S_*(S^m) \arrow[r, "S_*(p_m)"] \arrow[d, "S_*(f)"] & S_*(P_m(\mathbb{R})) \arrow[r] \arrow[d, "S_*(\hat{f})"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & S_*(P_n(\mathbb{R})) \arrow[r, "T_n"] & S_*(S^n) \arrow[r, "S_*(p_n)"] & S_*(P_n(\mathbb{R})) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y por tanto tenemos un diagrama conmutativo en homología

$$\begin{array}{ccc} H_q(P_m(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(P_m(\mathbb{R})) \\ {\scriptstyle H_q(\hat{f})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_{q-1}(\hat{f})} \\ H_q(P_n(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\delta_q} & H_q(P_n(\mathbb{R})) \end{array}$$

Como $H_0(f)$ es un isomorfismo*, $H_q(f)$ es un isomorfismo* para $0 \leq q \leq n$. Por lo tanto, en dimensión $n+1 \leq m$ tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(P_m(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & H_n(P_m(\mathbb{R})) \\ {\scriptstyle H_{n+1}(\hat{f})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\hat{f})} \\ H_{n+1}(P_n(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & H_n(P_n(\mathbb{R})) \end{array}$$

con $H(\hat{f}), \delta_{n+1}, \delta'_{n+1}$ isomorfismos.
Pero puesto que $H_{n+1}(Pm(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ y $H_{n+1}(P_n(\mathbb{R})) \cong 0$, el diagrama se convierte en

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{\delta_{n+1}} & \mathbb{Z}_2 \\ {\scriptstyle H_{n+1}(\hat{f})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle H_n(\hat{f})} \\ 0 & \xrightarrow{\delta'_{n+1}} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

lo cual implica una contradicción

♡

Corolario: Sea $n \geq 1$. Para toda función continua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ que verifica $f(-x) = -f(x), \forall x \in S^n$, existe $x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = 0$

Si $f(x) \neq 0 \ \forall x \in S^n$, podemos construir una aplicación continua $g : S^n \to S^{n-1}, g(x) = \frac{f(x)}{||f(x)||}$. La función g verifica que $g(-x) = -g(x) \ \forall x \in S^n$, lo cual contradice al teorema anterior.

♡

Corolario: Sea $n \geq 1$ Para toda función continua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ existe un punto $x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$

Supongamos que no existe tal x_0. Entonces la función $g = f(x) - f(-x)$ verifica que $g(-x) = g(x)$ y además $g(x) \neq 0 \ \forall x \in S^n$, lo que contradice al teorema anterior

Teorema de Lusternik-Schnirelmann

Theorem

Si la esfera S^n tiene una cubierta cerrada formada por los cerrados $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$, entonces al menos uno de ellos contiene dos puntos antipodales

Tomemos la función continua $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$f(x) = (\delta(x, A_1), \delta(x, A_2), ..., \delta(x, A_{n+1}))$$

donde $\delta(x, A_i)$ es la distancia del punto x al conjunto A_i.
Por uno de los corolarios anteriores, existe $x_0 \in S^n$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.
Al ser $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ cubierta abierta de S^n, $x_0 \in A_i$ para algún $A_i \iff \delta(x_0, A_i) = 0$ (ya que A_i es cerrado). Por lo tanto, tenemos que

$$f(x_0) = (\delta(x_0, A_1), \delta(x_0, A_2), ..., 0, ..\delta(x_0, A_{n+1})) =$$

$$f(-x_0) = (\delta(-x_0, A_1), \delta(-x_0, A_2), ..., 0, .., \delta(-x_0, A_{n+1}))$$

lo que implica que $\delta(-x_0, A_i) = 0 \iff -x_0 \in A_i$

$\pi_1(B)$ actúa sobre $H_q(B)$

Si tenemos la proyección $p : E \to X$ con E la cubierta universal, entonces $\pi_1(B)$ actúa sobre $S_q(E)$ y sobre $H_q(E)$:
Sea $\phi : \pi_1(B) \to A(p)$ isomorfismo. Entonces definimos la acción $* : \pi_1(B) \times E \to E$ como

$$\alpha * x \to \phi(\alpha)(x)$$

donde $\phi(\alpha)$ es un isomorfismo $\phi(\alpha) : E \to E$. Ya que $\pi_1(B)$ actúa sobre E, actúa también sobre $S_q(E, \mathbb{Q})$ de la siguiente manera:

$$\star : \pi_1(B) \times S_q(E, \mathbb{Q}) \to E, (\alpha \star \sigma) = \phi(\alpha)(\sigma)$$

$\star$ es una acción compatible con el diferencial, es decir $\delta(\alpha \star \sigma) = \alpha \star (\delta(\sigma))$: por un lado $\delta(\alpha \star \sigma) = \Sigma(\alpha \star \sigma) \circ \varepsilon^1 = \Sigma\phi(\alpha) \circ \sigma \circ \varepsilon^i$, por el otro, $\alpha \star (\delta(\sigma)) = \phi(\alpha)(\Sigma\sigma \circ \varepsilon^i) = \Sigma\phi(\alpha) \circ \sigma \circ \varepsilon^i$.
Así, $\pi_1(B)$ actúa sobre $H_q(E)$ mediante la acción

$$\diamond : \pi_1(B) \times H_q(E) \to E, \alpha \diamond [a] = [\alpha \star a]$$

Exactitud de la sucesión ♣

Queremos demostrar que la sucesión $0 \to S_*(B, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{T} S_*(E, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{S_p} S_*(B, \mathbb{Z}_2) \to 0$ es exacta:

- T es inyectiva, por lo que $Ker(T) = 0 = Im(\overrightarrow{0})$
- Dado que $S_p(T(\sigma)) = 2\dot{\sigma} = 0, Im(T) \subseteq Ker(S_p)$. Falta ver que $Ker(S_p) \subseteq Im(T)$.
  Sea $\sigma \in S_*(E, \mathbb{Z}_2)$ tal que $S_p(\sigma) = 0$. Entonces, sin pérdida de generalidad, $S_p(\sigma) = 2\theta$ con $\theta \in S_*(B, \mathbb{Z}_2)$. Eso significa que $\sigma = \beta_1 + \beta_2$, con β_1, β_2 levantamientos de θ. Tomamos pues $\theta \in S_*(B, \mathbb{Z}_2)$ y vemos que $T(\theta) = \beta_1 + \beta_2 = \sigma$, por lo que $\sigma \in Im(T)$ y así $Ker(S_p) \subseteq Im(T)$,de lo que tenemos $Im(T) = Ker(S_p)$
- Sea $\theta \in S_*(B, \mathbb{Z}_2)$, entonces existe $\sigma \in S_*(E, \mathbb{Z}_2)$ levantamiento de θ tal que $p(\sigma) = \theta$, por lo que $S_p(\sigma) = \theta$ y así S_p es sobreyectiva.

$H_0(p)$ es un isomorfismo

Puesto que $Im(H_0(p)) = Ker(O) = H_0(P_n(\mathbb{R})), H_0(p)$ es sobreyectiva. Falta verificar que es inyectiva, es decir $(H_0(p))^{-1}[0] = [0] \in H_0(S^n)$.
Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_1(S^n) & \xrightarrow{S_p} & S_1(P_n(\mathbb{R})) \\ \delta_1 \downarrow & & \downarrow \delta_1 \\ S_0(S^n) & \xrightarrow{\S_p} & S_0(P_n(\mathbb{R})) \end{array}$$

Sea $\sigma \in S_0(P_n(\mathbb{R}))$ tal que $[\sigma] = 0$, lo que implica que $\sigma = \delta(\theta) = \theta \circ \varepsilon^2 + \theta \circ \varepsilon^1$, con $\theta \in S_1(P_n(\mathbb{R}))$.
Sea $\beta \in S_0(S^n)$ tal que $\beta \notin [9]$, es decir $\beta \neq \gamma_1 + \gamma_2$, con $\gamma_1, \gamma_2 \in S_1(S^n)$.
Entonces $S_p(\beta) = p(\beta) \neq \theta_1 + \theta_2,\ \theta_1, \theta_2 \in S_0(P_n(\mathbb{R})) \Rightarrow [S_p(\beta)] \neq 0 \Rightarrow (H_0(p))^{-1}[0] = [0]$

Teorema de las dimensiones de espacios vectoriales y sucesiones exactas

Sea $0 \to V_n \xrightarrow{T_n} V_{n-1} \xrightarrow{T_{n-1}} ...V_1 \xrightarrow{T_1} V_0 \xrightarrow{T_0} 0$ una sucesión exacta de espacios vectoriales. Entonces $\Sigma_{p=0}^{n}(-1)^p * dim(V_p) = 0$.
Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Por el teorema fundamental del álgebra lineal, $\mid ImT \mid + \mid KerT \mid = \mid V \mid$. Aplicando dicho teorema, $\mid ImT_n \mid + \mid KerT_n \mid = \mid V_n \mid$. Como $KerT_n = 0$, entonces $\mid ImT_n \mid = \mid V_n \mid$.
De manera similar $\mid ImT_0 \mid + \mid KerT_0 \mid = \mid V_0 \mid$, y como $\mid ImT_0 \mid = 0$, entonces $\mid KerT_0 \mid = \mid V_0 \mid = \mid ImT_1 \mid$.
Para $1 \leq k \leq n-1$, $\mid ImT_k \mid + \mid KerT_k \mid = \mid V_k \mid$, pero como la sucesión $V_{k+1} \xrightarrow{T_{k+1}} V_k \xrightarrow{T_k} V_{k-1}$ es exacta, $\mid KerT_k \mid = \mid ImT_{k+1} \mid$, lo que implica que $\mid ImT_k \mid + \mid ImT_{k+1} \mid = \mid V_k \mid$. Entonces $\Sigma_{p=0}^{n}(-1)^p * dim(V_p) = \mid ImT_1 \mid -(\mid Im_1 \mid + \mid Im_2 \mid) + (\mid Im_2 \mid + \mid Im_3 \mid) - (\mid Im_3 \mid + \mid Im_4 \mid) + ... + (-1)^{n-1}(\mid Im_{n-1} \mid + \mid Im_n \mid) + (-1)^n \mid ImT_n \mid = 0$

$H_q(\hat{f})$ para $0 \leq q \leq n$ es un isomorfismo

$H_0\hat{f}$ es un isomorfismo

Puesto que $H_0(P_m(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2, H_0(P_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ y $H_0(\hat{f})[0] = [0]$, para que $H_0\hat{f}$ sea isomorfismo, basta que $H_0\hat{f}[1] = [1]$.

Por definición, $H_0(P_n) = \frac{S_0(P_n)}{Im\delta_1}$, así $[0] = \{\sigma \in S_0(P_n) \mid \sigma \in Im\delta_1\}$ y $[1] = \{\sigma \in S_0(P_n) \mid \sigma \notin Im\delta_1\}$ De manera análoga, $H_0(P_m) = \frac{S_0(P_m)}{Im\delta_1}$, lo que implica que $[0] = \{\sigma \in S_0(P_m) \mid \sigma \in Im\delta_1\}$ y $[1] = \{\sigma \in S_0(P_m) \mid \sigma \notin Im \in [0]_{H_0(P_j)}\delta_1\}$.

Afirmación: $\sigma \in [0]_{H_0(P_j)} \iff \sigma = \theta_1 + \theta_2$ (con $j = m, n$)

$\Rightarrow$Sea $\sigma \in [0]_{H_0(P_j)}$, por lo que $\sigma = \beta \circ \varepsilon^2 + \beta \circ \varepsilon^1$. Hacemos $\theta_1 = \beta \circ \varepsilon^1, \theta_2 = \beta \circ \varepsilon^2$

$\Leftarrow$ Sea $\theta = \theta_1 + \theta_2, \theta_1, \theta_2 \in S_0(P_j)$ Como $\theta_1, \theta_2 \in S_0(P_j)$ y P_j es arcoconexo existe un camino $\alpha : I \to P_j$ tal que $\alpha(0) = Im\theta_1$ y $\alpha(1) = Im\theta_2$. Notemos además que α es un 1-simplejo ($\alpha \in S_1(P_j)$) y que $\delta(\alpha) = \alpha \circ \varepsilon^1 + \alpha \circ \varepsilon^2 = \theta_1 + \theta_2$

Sea pues $\sigma \in [1]_{H_0(P_j)}$. Entonces $S(\hat{f})(\sigma) = [f(\sigma)]_{P_n}$. Como $[f(\sigma)]_{P_n} \neq \theta_1 + \theta_2, \theta_1, \theta_2 \in S_0(P_n) \Rightarrow [f(\sigma)]_{H_0(P_n)} = [1]$.
Por lo tanto $H_0(\hat{f})$ es un isomorfismo,
Retomemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_q(P_m(\mathbb{R})) \arrow[r, "\delta_q"] \arrow[d, "H_q(\hat{f})"'] & H_{q-1}(P_m(\mathbb{R})) \arrow[d, "H_{q-1}(\hat{f})"] \\ H_q(P_n(\mathbb{R})) \arrow[r, "\delta_q"] & H_q(P_n(\mathbb{R})) \end{tikzcd}$$

Supongamos que $H_{q-1}(\hat{f})$ es un isomorfismo. Por demostrar que H_q es un isomorfismo

- Inyectividad: Sea $[a] \in H_q(P_m)$ tal que $H_q(\hat{f})[a] = 0$. Por conmutatividad del diagrama,

$$\delta_q^{'}(H_q(\hat{f})[a]) = H_{q-1}(\hat{f})(\delta_q[a])$$

$$0 = H_{q-1}(\hat{f})(\delta_q[a]) \iff \delta_q[a] = 0$$

puesto que $H_{q-1}\hat{f}$ es un isomorfismo $\Rightarrow [a] = 0$, al ser δ_q isomorfismo .

- Sobreyectividad: Puesto que $H_q(P_m) \cong \mathbb{Z}_2 H_q(P_n)$ y $H_q(\hat{f})[a] = 0 \iff [a] = 0$, entonces $H_q(\hat{f})[1] = [1]$, por lo que $H_q(\hat{f})$ es sobreyectiva.

Referencias

- FÉLIX, Yves; TANRÉ; Daniel, *Topologie algébrique*, editorial Dunod
- MALDONADO, Miguel; *Topología II: introducción a teoría de homotopía*