Homologia

Emmanuel

June 2019

Grado

El grado de una fución $f : S^n \to S^n$, es el entero p, $x \to px$.
En homologia induce.
$H_q(f) : H_q(S^n) \to H_n(S^n)$

Grado local

Observaciones:

1. $H_q(S^n) = \mathbb{Z}$ cuando $q = n$,cero en otro caso.
2. $H_q(S^n) \cong H_q(S^n, S^n - p)$.
   Sea $p \in S^n, S^n - p \subset S^n$,tenemos la sucecion exacta larga de la siguiente forma:
   $\cdots \to H_q(S^n - p) \to H_q(S^n) \to H_q(S^n, S^n - p) \to \cdots$
   Como $S^n - p$ es contractil,entonces $H_q(S^n - p) = 0$,por exactitud obtenemos:
   $H_q(S^n) \cong H_q(S^n, S^n - p)$.

Observaciones

1. $H_q(U, U-p) \cong H_q(S^n, S^n-p)$, donde U es vecindad de p.
   Por proposicion,sea M una $m-varieda$ y $x \in M$
   Entonces $H_q(M, M-x) = \mathbb{R}$ cuando $q = n$,cero en otro caso.
   Para nuestro caso $H_q(U, U-p) = \mathbb{Z}$ cuando $q = n$,cero en otro caso.
   Entonces $H_q(U, U-p) \cong H_q(S^n, S^n-p)$
   Por observaciones anteriores tenemos:
   $H_q(U, U-p) \cong H_q(S^n, S^n-p) \cong H_q(S^n) \cong \mathbb{Z}$.
2. $H_q(f) : H_q(U, U-p) \to H_q(V, V-p)$.
   Sea $f : (U, U-p) \to (V, V-p)$ continua y $f(U) \subset V$ donde U, V son vecindades de p y q.
   Así tenemos el homomorfismo inducido
   $H_q(f) : H_q(U, U-p) \to H_q(V, V-p)$.

Grado local

Sea $f : S^n \to S^n$ y $q \in f^{-1}(p)$ un punto aislado en la imagen inversa.
El grado local de f en q:
$deg(f, q) := degH(f) : H_q(U, U - q) \to H_q(V, V - p)$.
Para U, V vecindades de q, p que satisfacen que $f(U) \subset V$.
Por observaciones anteriores tenemos tenemos que el grado local es un número entero ya que
$H_q(S^n, S^n - p) \cong \mathbb{Z}$,para cualquier punto $p \in S^n$

Proposición 5.11

Sea $f : S^n \to S^n$,p tienen una imagen inversa discreta $f^{-1}(p) = Q = \{q_i\}_i$.
Entonces: $degf : \sum deg(f, q_i)$

Observaciones

1. Por proyeccíon estereografica tenemos $\mathbb{R}^n - p \simeq S^{n-1}$.
   Entonces $H_q(S^{n-1})$es siempre 0 ya que nunca coinciden q y n.
2. Sea $Q = \{q_i\}_i$ donde $\mid Q \mid = n \geq 1$.
   Notemos que $\mathbb{R}^n - Q \simeq S^{n-1} \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}$ $n-1$ veces.
   Entonces $H_q(\mathbb{R}^n - Q) \cong H_q(S^{n-1} \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1})$.
   Pero $H_q(S^{n-1} \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}) \cong H_q(S^{n-1}) \oplus \cdots \oplus H_q(S^{n-1})$.
   Pero por la obsrvacion anterior $H_q(S^{n-1})$es siempre 0,entonces:
   $H_q(S^{n-1} \vee S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1})$ es siempre 0 por lo tanto
   $H_q(\mathbb{R}^n - Q)$ es siempre 0.

Demostración Proposición 5.11

Sea el siguiente diagrama conmutativo de suceciones exactas largas de parejas $(S^n, S^n - Q), (S^n, S^n - p)$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H_q(S^n - Q) & \to & H_q(S^n) & \to & H_q(S^n, S^n - Q) & \to & H_{q-1}(S^n - Q) & \to \cdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \to & H_q(S^n - p) & \to & H_q(S^n) & \to & H_q(S^n, S^n - p) & \to & H_{q-1}(S^n - p) & \to \cdots
\end{array}$$

Notemos que los primeros y ultimos renglones son 0 por observaciones anteriores. Entonces tenemos el siguiente diagrama comutativo con renglones isomorfos.

$$\begin{array}{ccc}
H_q(S^n) & \to & H_q(S^n, S^n - Q) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H_q(S^n) & \to & H_q(S^n, S^n - p)
\end{array}$$

Por un lado tenemos que $degf(x) = px$ por definicion de grado.
Por otro lado tenemos que $deff(x) = y$, pero como el diagrma conmuta tenemos $degf(x) = xp = y = degf(x)$.
Entonces $degf = deg(H_q(S^n) \to H_q(S^n, S^n - Q) \to H_q(S^n, S^n - p))$.

Ahora escojemos una vecindad V de p talque $f^{-1}(V) = \bigsqcup_i U_i$ que es una coleccion disjunta de vecindades de q_i,obtenemos:
$H_q(S^n, S^n - Q) \cong H_q(f^{-1}(V), f^{-1}(V) - Q)$ por teorema de escisión.
$H_q(S^n, S^n - Q) \cong \bigoplus H_q(U_i, U_i - q_i)$ por naturalidad.
Entonces $H_q(S^n, S^n - Q) \cong H_q(U_i, U_i - q_i)$ y por definicion de grado local de f en q_i tenemos
$deg(f, q_i) = H(f) : H_q(U_i, q_i) \rightarrow H_q(V, p)$ y por lo anterior
$degf = deg(H_q(S^n) \rightarrow \bigoplus H_q(U_i, U_i - q_i) \rightarrow H_q(V, V - p)) = \sum deg(f, q_i)$

Corolario 5.12

Si $f : S^n \to S^n$ no es sobreyectiva entonces $deg(f) = 0$.

Demostracion

1. Observemos que $H_q(X, X) = 0$.
2. Demostracion:Como f no es sobreyectiva existe w tal que su imagen inversa de w es el vacio así obtenemos: $deg(f, w) = \bigoplus H_q(U, U) \to H_q(V, V - p)$,pero por la observacion anterior obtenemos que $deg(f) = 0$

Lema de Sperner

Sea $\triangle$ un n-simplejo con vertives $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$.
Sea $\triangle_i$ la cara opuesta al vertice v_i,sus vertices son $v_1, v_2, ..., v_{n+1}$ exepto v_i.
Definimos la frontera de $\triangle$ como la union de las $n+1$ caras $\triangle_i$.
Notación $\partial\triangle$

Lema de Sperner

Sea $\blacktriangle$ una subdivioncion de $\triangle$ esta etiquetada por los numeros $1, 2, ..., n+1$ de tal manera que si un vertice corresponde a la cara $\triangle_i$, entonces la etiqueta no es igual a i.
Entonces existe almenos un n-simplejo en $\blacktriangle$ con etiquetas en los vertices $\{1, 2, ..., n+1\}$.

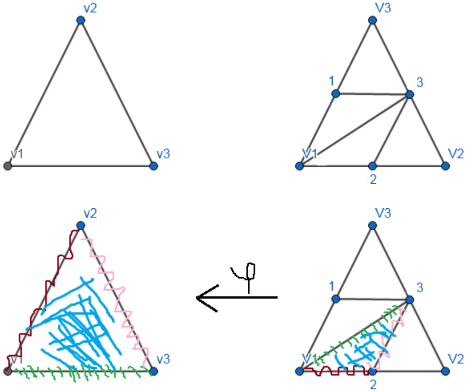
Demostracion

Sea $f : \blacktriangle \to \triangle$ que va de vertices en $\blacktriangle$ a vertives de $\triangle$ de tal manera que a cada vertice v de $\blacktriangle$ con etiqueta i le asiganmos $f(v) = v_i$.Tenemos una funcion simplicial φ inducuida por f, que manda simplejos de $\blacktriangle$ a simplejos en $\triangle$.
Así obteniendo la imagen de los vertices de $\blacktriangle$ en $\triangle$ con f y asiganamos a cada simplejo de $\blacktriangle$ un simplejo en $\triangle$.

Notemos que el lemas de Sperner se cumple $\Leftrightarrow$ φ es sobreyectiva.

$\Rightarrow$ Como el lema de Sperner se cumple entonces tenemos un n-simplejo en $\blacktriangle$ con las n+1 etiquetas y por la manera que definimos a φ es sobreyectiva.
$\Leftarrow$ Como φ es sobreyectiva entonces el n+1 simplejo en $\triangle$ tiene preimagen en $\blacktriangle$ lo que significa que tenemos al menos un n-simplejo con las etiquetas $\{v_1, v2, ..., v_{n+1}\}$,por lo cual significa que se cumple el lema de Sperner.

Ejemplo



Referencias

1. Sperner's Lemma, the BrouwerFixed-Point Theorem, and Cohomology ,Nikolai V. Ivanov (https://arxiv.org/pdf/0906.5193.pdf)
2. Elementary Applied Topology,Robert Ghrist