Homología

Diego

UAM-UAZ

Red de sensores

June 5, 2019

Como saber si una región de interes esta totalmente cubierta por una red de sensores.

Usando un poco de topología algebraica

Mi objetivo es que con ayuda del algebra homológica, usando homología relativa (simplicial) se pueda saber si mi región de interes esta siendo cubierta.

Para resolver

1. Descripción del problema
2. Definiciones
3. Como resolver
4. Resolverlo con topología
5. Referencias

Descripción

Problema

El problema de recolectar información con una red de sensores es un desafio de ingienería para el cual unas herramientas de topología encajan extraamente.

Planteamiento

Un problema simple de plantear es el de cobertura. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y considere un conjunto finito de puntos Q (sensores), con dos tareas:

Tareas

Los sensores deben de detectar una vecindad en su locación en D, se comunicaran entre si. Ambas de estas tareas se consideran como locales pues sensores individuales no pueden extraer información o enviar información sobre todo D. El problema es si hay hoyos en nuestra red de cobertura que no son detectados.

Cuando se conocen las coordenadas de los sensores, la geometría computacional es suficiente para determinar la cobertura. Cuando los sensores no tienen posición conocida, la aplicación de homología es efectiva. Se asumen especificaciones minimas para claridad y facilidad en las pruebas:

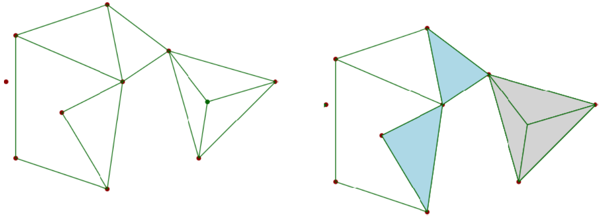
Definiciones

1) Los sensores son un conjunto finito de puntos $Q \subseteq \mathbb{R}^2$.
2)Todos los sensores se pueden identificar, las vecindades cercanas se detectan y establecen un link de comunicación.
3)La comunicación de los puntos de Q es simetrica y genera una gráfica de comunicación llamada X.
4) Las regiones cubiertas por sensores se basan en comunicación por proximidad, los sensores se comunican por parejas, la unión de esto es nuestra cubierta convexa de $\mathbb{R}^2$
5)Uno fija un cerco C (una curva cerrada que cota a D) en nuestra región de interes.

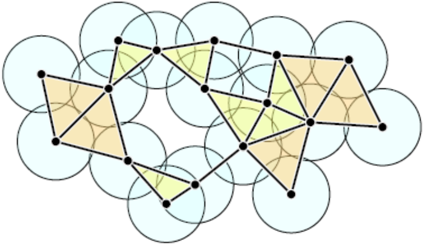
Funciones especiales

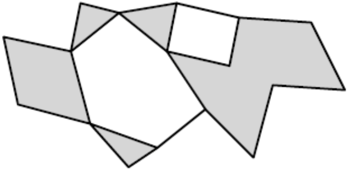
Complejo bandera: Sea $G = (V, E)$ una gráfica, el complejo bandera asociado a G se construye introduciendo un $k - simplejo$ si $k + 1$ vértices forman una subgrafica completa G_k de G. Un $k - simplejo$ es una gráfica completa de $k + 1$ vértices.
Función sombra: $\mathbb{S} : (F(X), C) \to (\mathbb{R}^2, \delta D)$ toma a un complejo simplicial en este caso al complejo bandera de X, envia a los vértices a sus coordenadas en $\mathbb{R}^2$ y a todas las aristas que esten dentro de otro un simplejo más grande no las toma en cuenta y en su lugar rellena al contorno de los simplejos. A la segunda entrada C que es el cerco de D se manda a δD como un homeomorfismo pues son homeomorfos.

Ejemplos de las funciones



bandera.png





Como resolver el problema con homología

El problema estara resuelto si $[C] = 0 \in H_1(F) \leftrightarrow \exists[\alpha] \in H_2(F, C)$, con $\delta\alpha = C$ pues si la clase de C es cero significaría que la región de interes esta totalmente cubierta pues la red no tendría hoyos.

Recordar

Homología relativa

Sean D_* y C_* complejos de cadenas tales que D_k es sumbodulo de C_k para todo k, D_* es subcomplejo de C_*, $D_* \subseteq C_*$.
De esto se forma la cadena:
$0 \to S_*(D) \to S_*(C) \to \frac{S_*(C)}{S_*(D)} \to 0$ De donde se obtiene la s.e.l.
$... \to H_n(D) \to H_n(C) \to H_n(C, D) \to H_{n-1}(A) \to ...$
Además: $H_n(C_*) := \frac{Z_n}{B_n} = \frac{n\text{−}ciclos}{n\text{−}fronteras}$
$H_i = \frac{ker(\delta i)}{im(d_{i+1}}$

Ver que es un si y sólo si

$[C] = 0 \in H_1(F) \leftrightarrow \exists[\alpha] \in H_2(F, C)$

Primero veamos la s.e.l. inducida por la inclusión $i : C \to F$
$\ldots \to H_2(F) \to H_2(F, C) \to H_1(C) \to H_1(F) \to \ldots$
$\Rightarrow]$ $[C] = 0 \in H_1(F)$
$\to [C] \in ker(d_1)$ y como $H(i)(C) = [C]$ en este caso, entonces $[C] \in ker(H(i))$ y como es una s.e.l $\exists \alpha \in H_2(F, C)$ tal que $\delta(\alpha) = C$
$\Leftarrow]$ $\exists[\alpha] \in H_2(F, C)$ con $\delta\alpha = C$
$C \in im(\delta) = ker(H(i))$ por ser s.e.l., entonces $H(i)[C] = 0$ y por hipótesis $H(i)[C] = [C]$, así pues $[C] = 0 \in H_1(F)$

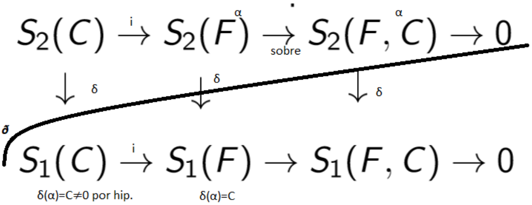
Ahora veamos el siguiente diagrama hecho por la función sombra

De la s.e.l. anterior relacionemosla con la siguiente con la función sombra

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & H_2(F, C) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "H(\mathbb{S})"] & H_1(C) \arrow[r] \arrow[d, "\cong H(\mathbb{S})"] & {} \\
\arrow[r] & H_2(\mathbb{R}^2, \delta D) \arrow[r, "\delta"'] & H_1(\delta D) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

diagrama.png

Puesto que la función sombra es un isomorfismo en la segunda entrada, el segundo termino de la pareja $\mathbb{S}$ es un homeomorfismo y por hipótesis $\delta\alpha = C \neq 0$ por lo que $H(\mathbb{S})\Delta[\alpha] = H(\mathbb{S})[\delta\alpha]$, esto ultimo por:



de delta.png

El diagrama de homologías conmuta

Por la función sombra

Como la función sombra es continua el diagrama conmuta, asi se obtiene que $H(\mathbb{S})[\alpha] \neq 0$.

Supongamos que la región de interes no tiene un punto cubierto por la red

Sea $p \notin im(\mathbb{S})$

Por lo que la función sombra se puede ver como la composición: $F \to \mathbb{R}^2 - p \to \mathbb{R}^2$, por lo que el diagrama anterior se puede ver de la siguiente forma:

Nuevo diagrama

$$
\begin{tikzcd}
& H_2(F, C) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[dl, "\mathbb{S}"'] \arrow[dd, "H(\mathbb{S})"] & H_1(C) \arrow[dd, "\cong H(\mathbb{S})"] \\
H_2(\mathbb{R}^2 - p, \delta D) \arrow[dr, "i"'] & & \\
& H_2(\mathbb{R}^2, \delta D) \arrow[r, "\delta"'] & H_1(\delta D)
\end{tikzcd}
$$

Por demostrar $H_2(\mathbb{R}^2 - p, \delta D) = 0$

Veamos la s.e.l. de la pareja $(\mathbb{R}^2 - p, \delta D)$
$\ldots \to H_2(\mathbb{R}^2 - p) \to H_2(\mathbb{R}^2 - p, \delta D) \to H_1(\delta D) \to H_1(\mathbb{R}^2 - p) \to \ldots$
Notemos que
$H_2(\mathbb{R}^2 - p) = 0$ pues $\mathbb{R}^2 - p \cong S^1$ y $H_2(S^1) = 0$
Ahora vease que los ultimos dos terminos son isomorfos pues $\mathbb{R}^2 - p \cong S^1 \cong \delta D$ y como $H(i)$ es la función grado y como p ésta en D el grado es ± 1 y como cuando el grado es ± 1 significa que es la identidad o la función antipodal, que son isomorfismos, $H(i)$ es un isomorfismo, así pues :

$0 = ker(H(i))$ por ser isomorfismo, y como es una s.e.l.,
$0 = ker(H(i)) = im(\delta)$, entonces como
$im(d_2) = ker(\delta) = 0 = im(\delta)$, por primer teorema de
homomorfismos ($\frac{G}{ker(f)} \cong im(f)$.
$H_2(\mathbb{R}^2 - p, \delta D) = 0$

Pero

Ya habíamos visto que $H(\mathbb{S})[\alpha] \neq 0$ pero por la composición tenemos que $H(\mathbb{S})[\alpha] = 0$ así que $0 \neq 0$ es una contradicción por lo que D tiene que estar totalmente cubierto por la red de sensores.

Referencias

1. Elementary Algebraic Topology Ghrist
2. Examples of cell complexes
3. Sobre las diferentes nociones topológicas de complejo y algunas de sus aplicaciones Laura Núnez de Arco Valenzuela
4. Coverage in sensor networks via persistent homology Ghrist-Silva