TEOREMA DE COEFICIENTES UNIVERSALES PARA HOMOLOGÍA

MIGUEL A. MALDONADO

1. Introducción

Dados $\mathcal{C}$ complejo de cadenas de grupos abelianos y M grupo abeliano cualquiera (fijo) considere las siguientes operaciones descritas en el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, Rightarrow] & \mathcal{C} \arrow[d, Rightarrow] \\
\mathcal{C} \otimes M \arrow[d, Rightarrow] & H_*(\mathcal{C}) \arrow[d, Rightarrow] \\
H_*(\mathcal{C} \otimes M) & H_*(\mathcal{C}) \otimes M
\end{tikzcd}$$

En el lado izquierdo consideramos el producto tensorial $\mathcal{C} \otimes M$ y tomamos su homología; en el lado derecho consideramos la homología $H_*(\mathcal{C})$ y después tensorizamos con M. Resulta natural preguntarse acerca de la relación entre los objetos obtenidos:

$$H_*(\mathcal{C} \otimes M), \qquad H_*(\mathcal{C}) \otimes M$$

En el presente texto mostraremos que, en general, estos objetos no son isomorfos y que una manera de *medir la diferencia* entre ellos es a través del ***funtor de torsión*** Tor.

2. Conceptos preliminares

El **producto tensorial** de dos grupos abelianos A, B es el cociente

$$A \otimes B = F(A \times B)/R$$

del grupo libre $F(A \times B)$ con base $A \times B$ por el subgrupo R generado por los elementos

---

Date: noviembre/diciembre 2018.

- $(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$
- $(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$
- $r(a, b) - (ra, b)$
- $r(a, b) - (a, rb)$

La imagen de un elemento base (a, b) en $A \times B$ se denota por $a \otimes b$. En general, un elemento de $A \otimes B$ se expresa como una suma finita $\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$.

A continuación algunas propiedades del producto tensorial

Teorema 2.1. *Para A, B, C grupos abelianos se tiene:*

(1) $A \otimes B \cong B \otimes A$.
(2) $\mathbb{Z} \otimes A \cong A$
(3) $(A \otimes B) \otimes C \cong A \otimes (B \otimes C)$
(4) $(\oplus_i A_i) \otimes B \cong \oplus_i (A_i \otimes B)$
(5) *Para dos homomorfismos $f : A \to C$, $g : B \to D$ existe un homomorfismo*
$$f \otimes g : A \otimes B \longrightarrow C \otimes D,$$
tal que $a \otimes b \mapsto f(a) \otimes g(b)$, $\forall (a, b) \in A \times B$.
(6) *Toda sucesión exacta de grupos abelianos*
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$
y todo grupo abeliano M la siguiente sucesión es exacta
$$A \otimes M \xrightarrow{f \otimes id} B \otimes M \xrightarrow{g \otimes id} C \otimes M \longrightarrow 0$$

El resultado anterior es estándar y la demostración puede encontrarse en cualquier libro de Álgebra (Homológica). Por la afirmación (6) del teorema se dice que la operación $- \otimes B$ es un **funtor exacto por la derecha**. Esta afirmación no puede darse para tener *exactitud por la izquierda* como se muestra:

Ejemplo 2.2. *Tomemos $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ morfismo dado por multiplicación por 2. Claramente ϕ es inyectivo por lo que se tiene una sucesión exacta*
$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Al tensorizar con $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ se obtiene que el homomorfismo

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

es trivial y claramente no es inyectivo.◀

Sea

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\rho} C \longrightarrow 0 \tag{1}$$

sucesión exacta de grupos abelianos. Si existe $r : B \to A$ tal que $r \circ i = 1_A$, entonces, usando un argumento que involucra el Lema del 5to, se tiene un isomorfismo $B \cong A \oplus C$. En estas condiciones se dice que la sucesión se ***escinde***. De igual forma, si existe $\sigma : C \to B$ homomorfismo tal que $\rho \circ \sigma = 1_C$ se tiene que $B \cong A \oplus C$. En estas condiciones el homomorfismo puede ser construido (por elección) si el grupo C es abeliano libre; véase [2, Prop.5.35].

3. Resoluciones

Motivación: recordemos que una **presentación** de un grupo G se escribe como $\langle g_i \mid r_j \rangle$, lo cual indica que G está generado por los elementos g_i que satisfacen ciertas relaciones (ecuaciones) $r_j = 0$. En otras palabras se tiene una sucesión exacta corta de la forma:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0 \tag{2}$$

donde F es el grupo libre generado por los g_i y N es el subgrupo normal más pequeño que contiene a los r_j. Esta situación cambia ligeramente al considerar módulos debido a que *ser libre* no es una propiedad que se herede a submódulos ([5, p.325]). Finalmente, observemos que por el **Teorema de Nielsen-Schreier** N es también libre, lo cual será de importancia más adelante; ver Lema 4.2.

Una ***resolución libre*** $\mathcal{L}$ de un grupo abeliano A es una sucesión exacta de grupos abelianos

$$\mathcal{L} : \qquad \cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{d_2} L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

donde los L_i's son grupos abelianos libres.

Dada una resolución $\mathcal{L}$ de A definimos la **resolución reducida** como

$$\mathcal{L}_A : \qquad \cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{d_2} L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \longrightarrow 0$$

Notemos que la resolución reducida $\mathcal{L}_A$ ya no es más una sucesión exacta si $A \neq 0$ pues

$$im(d_1) = ker(\epsilon) \neq ker(L_0 \to 0) = L_0$$

Más aún, observemos que al calcular los grupos de homología, se tiene que

$$H_0(\mathcal{L}_A) = L_0/im(d_1) \cong L_0/ker(\epsilon) \cong A \tag{3}$$

y $H_i(\mathcal{L}_A) = 0$, para $i > 0$.

Es un resultado elemental que todo R-módulo M tiene (al menos) una resolución libre ([4], [1]). Por otro lado, el siguiente resultado muestra que una resolución libre es única salvo homotopía ([1, Corolario 2.23])

Teorema 3.1. *Sean $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ dos resoluciones libres de A. Entonces existe un homomorfismo $f_* = \{f_n : L_n \to L'_n\}$ de sucesiones exactas tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & L_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & L_0 \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "f_0"] & A \arrow[r] \arrow[d, "="] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & L'_n \arrow[r, "d_n"] & L'_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & L'_1 \arrow[r, "d_1"] & L'_0 \arrow[r, "\epsilon"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Más aún, cualesquiera dos homomorfismos f_*, g_* que hagan conmutativo al diagrama son homotópicos.

Este resultado garantiza la existencia de homomorfismos

$$f_* : L_* \to L'_*, \qquad g_* : L'_* \to L_*$$

tales que $f \circ g, g \circ f$ son homotópicas a la identidad. Extendiendo estos a morfismos de la forma $f \otimes id, \ \ g \otimes id$ se obtiene el siguiente

Corolario 3.2. *Sean A, B dos grupos abelianos y $\mathcal{L}$ una resolución libre de A. Entonces la homología del complejo de cadenas $\mathcal{L} \otimes B$ no depende de la elección de la resolución $\mathcal{L}$ elegida.*

4. El funtor Tor

Para dos grupos abelianos A, B definimos el **funtor de torsión**

$$\mathrm{Tor}_p(A, B) = H_p(\mathcal{L}_A \otimes B),$$

donde $\mathcal{L}_A$ es una resolución libre reducida de A. Es decir, de la resolución $\mathcal{L}_A$ se considera y producto tensorial

$$\mathcal{L}_A \otimes B : \qquad \cdots \longrightarrow L_2 \otimes B \longrightarrow L_1 \otimes B \longrightarrow L_0 \otimes B \longrightarrow 0$$

y después calculamos sus grupos de homología. Por el corolario de arriba la definición del funtor torsión es independiente de la resolución libre elegida.

Ejemplo 4.1. *Consideremos la parte baja de $\mathcal{L}_A$*

$$\cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{d_2} L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \longrightarrow 0$$

Por el Teorema 2.1 se tiene una sucesión exacta de la forma

$$\cdots \longrightarrow L_2 \otimes B \xrightarrow{d_2 \otimes id} L_1 \otimes B \xrightarrow{d_1 \otimes id} L_0 \otimes B \longrightarrow 0 \tag{4}$$

Del cálculo (3) se tiene $Tor_0(A, B) = A \otimes B$.◀

A continuación usaremos que todo grupo tiene una presentación; véase 2.

Lemma 4.2. *Todo grupo abeliano A tiene una resolución libre de la forma*

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

Dem. Dado un conjunto de generadores de A tomamos L_0 es grupo abeliano libre con base en correspondecia 1 a 1 con los generadores de A; esto produce un homomorfismo sobreyectivo ϵ :

$L_0 \to A$. Dado que L_0 es libre, $L_1 = ker(\epsilon)$ es también libre. Finalmente tomamos $d_1 : L_1 \to L_0$ inclusión canónica para obtener el resultado. ■

De este resultado se sigue que la homología del complejo $\mathcal{L}_A \otimes B$ es trivial en dimensiones altas; es decir,

$$\mathrm{Tor}_p(A, B) = 0, \quad \forall p \geq 2.$$

En esta situación el único grupo de interés es $\mathrm{Tor}_1(A, B)$ que usualmente se denota por $\mathrm{Tor}(A, B)$.

Observemos que por definición $\mathrm{Tor}(A, B) = H_1(\mathcal{L}_A \otimes B) = ker(d_1 \otimes id)$. Además, de la sucesión

$$L_1 \otimes B \longrightarrow L_0 \otimes B \longrightarrow 0$$

se obtiene

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, B) \xrightarrow{s} L_1 \otimes B \xrightarrow{d_1 \otimes id} L_0 \otimes B \xrightarrow{r} A \otimes B \longrightarrow 0$$

donde el morfismo s es la inclusión canónica y r es morfismo cociente. Debido a esta sucesión exacta se dice que $\mathrm{Tor}(A, B)$ mide la imposibilidad de extender la sucesión de arriba por la izquierda a una sucesión exacta larga; véase Teorema 4.5 más abajo.

Ejemplo 4.3. *Todo grupo abeliano libre A tiene una resolución libre de la forma*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r] \arrow[d, "="] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, "="] & A \arrow[r] & 0 \\ & 0 & A & & \end{tikzcd}$$

por lo que $Tor(A, B) = 0$.◀

Ejemplo 4.4. *Tomemos $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ morfismo dado por multiplicación por p y consideremos la sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Al tensorizar con $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ se obtiene

$$0 \longrightarrow Tor(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

De donde

$$Tor(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = ker(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

donde m es el máximo común divisor de p, q. Este ejemplo es el inciso (5) *de la Proposición 3A.5 de* [3].◀

Teorema 4.5. *Dados una sucesión exacta corta de grupos abelianos*

$$0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow 0$$

y un grupo abeliano A existe una sucesión exacta de la forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Tor(A, B_1) \arrow[r] & Tor(A, B_2) \arrow[r] & Tor(A, B_3) \arrow[dlll] \\
A \otimes B_1 \arrow[r] & A \otimes B_2 \arrow[r] & A \otimes B_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dem. Véase [2, Prop.5.41]; [3, Prop.3A.5]. ■

Lemma 4.6. *Si A ó B es abeliano libre, entonces $Tor(A, B) = 0$.*

Dem. Observemos que si A es libre entonces el resultado se obtiene por el Ejemplo 4.3. Supongamos que B es grupo libre y sea $0 \to L_1 \to L_0 \to A \to 0$ resolución libre de A. Para $\{x_i\}_{i \in I}$ base de B denotamos por $\mathbb{Z}x_i$ al grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$ generado por x_i. De la igualdad $B = \oplus_i \mathbb{Z}x_i$ se sigue que $L_i \otimes B \cong \oplus(L_i \otimes \mathbb{Z}x_i)$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tor}(A, B) &= H_1(\oplus_i(L_i \otimes \mathbb{Z}x_i)) \\
&= \oplus_i H_1(L_i \otimes \mathbb{Z}x_i) \\
&= \oplus_i H_1(L_i) \otimes \mathbb{Z}x_i = 0
\end{aligned}$$

Y el resultado se obtiene. ■

Lemma 4.7. *$Tor(A, B) \cong Tor(B, A)$*

Dem. Por el Lema 4.2 tomamos la resolución libre

$$0 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow B \longrightarrow 0$$

Por el Lema anterior la sucesión exacta del Teorema 4.5 tiene sólo cuatro elementos no triviales; de aquí se tiene un diagrama de la forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & A \otimes L_1 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A \otimes L_0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A \otimes B \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}(B,A) \arrow[r] & L_1 \otimes A \arrow[r] & L_0 \otimes A \arrow[r] & B \otimes A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde el renglón de abajo se obtiene de manera similar al superior al considerar $\mathrm{Tor}(B, A)$. El resultado se obtiene al notar la conmutatividad del diagrama y aplicando el Lema del 5to. ■

Lemma 4.8. *Si B es un grupo abeliano libre sin torsión, $Tor(A, B) = 0$*

Dem. Consideremos la resolución libre de A

$$0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{d_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

y recordemos que $\mathrm{Tor}(A, B) = ker(d_1 \otimes id)$. Tomemos $\sum_i a_i \otimes x_i \in ker(d_1 \otimes id)$ y denotemos por C el subgrupo de B generado por la colección finita $\{x_i\}_{i \in I}$. Puesto que todo grupo abeliano finitamemte generado y sin torsión es libre ([2, Prop.5.35]) el grupo C es libre y por tanto

$$\mathrm{Tor}(A, C) = ker(d_1 \otimes id : L_1 \otimes C \longrightarrow L_0 \otimes C) = 0$$

de donde $\sum_i a_i \otimes x_i = 0$ y por tanto $\mathrm{Tor}(A, B) = 0$. ■

Recordemos que el **subgrupo de torsión** $T(G)$ de un grupo G consiste de todos los elementos de G orden finito.

Lemma 4.9. *$Tor(A, B) = Tor(T(A), B)$.*

Dem. Basta tomar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow T(A) \longrightarrow A \longrightarrow A/T(A) \longrightarrow 0,$$

aplicar el Teorema 4.5 y aplicar el Lema 4.8 pues $A/T(A)$ es libre de torsión. ■

Este último resultado justifica el término *torsión* en la construcción de Tor.

5. El Teorema

Recordemos que la intención del presente texto es analizar qué tan diferentes son las construcciones $H_*(\mathcal{C} \otimes M), H_*(\mathcal{C}) \otimes M$, asociadas a un complejo de cadenas $\mathcal{C}$ y un grupo abeliano M. La respuesta la tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.1 (de Coeficientes Universales)**.** *Sean $\mathcal{C}$ complejo de cadenas de grupos abelianos libres y G grupo abeliano. Entonces, para todo $n \geq 1$, se tiene una sucesión exacta de la forma*

$$0 \longrightarrow H_n(\mathcal{C}) \otimes G \longrightarrow H_n(\mathcal{C} \otimes G) \longrightarrow Tor(H_{n-1}(\mathcal{C}), G) \longrightarrow 0$$

Los términos $H_n(\mathcal{C} \otimes G)$ son llamados los **grupos de homología de $\mathcal{C}$ con coeficientes en G** y se denotan mediante $H_n(\mathcal{C}; G)$. Con esto presente los grupos $H_n(\mathcal{C})$ se refieren a la homología de $\mathcal{C}$ con **coeficientes enteros**.

La sucesión del teorema se escinde y se tiene un isomorfismo:

$$H_n(\mathcal{C}; G) \cong (H_n(\mathcal{C}) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G), \tag{5}$$

de lo cual se obtiene que $\mathrm{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G)$ mide la diferencia entre la operaciones mencionadas. Finalmente diremos que a pesar de que la sucesión del teorema se escinde, no lo hace de manera *natural*; es decir, es posible que un morfismo de complejos de cadenas $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ no induzca un diagrama conmutativo entre los respectivos isomorfismos en (5); véase [3, Ejem.2.51].

6. Homología para espacios

Consideremos $\mathcal{C}$ el complejo de cadenas singular de un espacio topológico X: consiste de grupos abelianos libres $S_q(X)$ generados por funciones continuas $\Delta^q \to X$, llamadas **q-simplejos singulares**, y por morfismos $d_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ definidos por las *caras* de simplejos estándard. La homología que determina este complejo es llamada la **homología singular de X** (con coeficientes enteros) y se denota por $H_*(X; \mathbb{Z})$ o simplemente por $H_*(X)$ si es claro qué coeficientes se están considerando.

Existen varias razones para considerar la homología (singular) de un espacio con diferentes coeficientes a los enteros:

- En presencia de espacios *no orientables* resulta conveniente tomar coeficientes en $\mathbb{Z}_2$; véase [1, Cor.5.6].
- Al tomar coeficientes en un campo queda de manifiesto una dualidad entre homología y *cohomología*, sin información extra proporcionada por el funtor Tor; véase [1, Cor.2.31].
- En general, al tomar coeficientes en un campo los cálculos homológicos se ven simplificados de manera considerable; véase [3, Ej.2.50].

Corolario 6.1. *Sean X espacio topológico y G grupo abeliano. Para cada $n \geq 1$ se tiene una sucesión exacta de la forma*

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes G \longrightarrow H_n(X;G) \longrightarrow Tor(H_{n-1}(X), G) \longrightarrow 0$$

Al igual que antes se tiene un isomorfismo de la forma

$$H_n(X;G) \cong (H_n(X) \otimes G) \oplus \mathrm{Tor}(H_{n-1}(X), G)$$

que, en general, no es natural respecto a funciones continuas $f : X \to Y$.

Terminamos esta sección con algunos comentarios sobre el isomorfismo anterior ([3, Cor.3A.6, 3A.7]):

(1) Del Lema 4.8 se tiene que $\mathrm{Tor}(A, \mathbb{Q}) = 0$ por lo que se tiene un isomorfismo

$$H_n(X;\mathbb{Q}) \cong H_n(X) \otimes \mathbb{Q}.$$

En particular, si $H_n(X)$ es finitamente generado, la dimensión de $H_n(X, \mathbb{Q})$, considerado como espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, es igual al rango de $H_n(X)$.

(2) Si $H_n(X), H_{n-1}(X)$ son finitamente generados, entonces para p primo
   (a) $H_n(X;\mathbb{Z}_p)$ contiene un sumando $\mathbb{Z}_p$ por cada sumando $\mathbb{Z}$ de $H_n(X)$

(b) $H_n(X;\mathbb{Z}_p)$ contiene un sumando $\mathbb{Z}_p$ por cada sumando $\mathbb{Z}_{p^k}$ de $H_n(X)$, para $k \geq 1$

(c) $H_n(X;\mathbb{Z}_p)$ contiene un sumando $\mathbb{Z}_p$ por cada sumando $\mathbb{Z}_{p^k}$ de $H_{n-1}(X)$, para $k \geq 1$

(3) $\tilde{H}_n(X) = 0, \forall n$ si y sólo si $\tilde{H}_n(X;\mathbb{Q}) = 0 = \tilde{H}_n(X;\mathbb{Z}_p)$, para todo n y todo primo p.

(4) Una función $f : X \to Y$ induce isomorfismos en $H_*(-)$ si y sólo si induce isomorfismos en $H_*(-;\mathbb{Q})$ y en $H_*(-;\mathbb{Z}_p)$, para todo primo p.

References

[1] Davis, J.F., Kirk, P., **Lecture Notes in Algebraic Topology**, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2001.

[2] Félix, Y., Tanré, D., **Topologie Algebrique**, Dunod, 2010.

[3] Hatcher, A., **Algebraic Topology**, Cambridge University Press, 2002.

[4] Lluis-Puebla, E., **Álgebra Homológica, Cohomología de Grupos y K-Teoría Algebraica Clásica**, Sociedad Matemática Mexicana.

[5] Rotman, J.J., **An Introduction to Homological Algebra**, Springer, Universitext .