Truco de las Tijeras de Dirac
Proyecto (Homotopía)

(Unidad Académica de Matemáticas, UAZ)

Héctor Jesús Sotelo Carrillo
Asesor: Miguel Angel Maldonado

3 de diciembre de 2018

Introducción

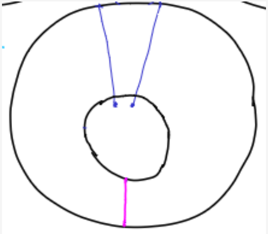
El truco de las tijeras de Dirac

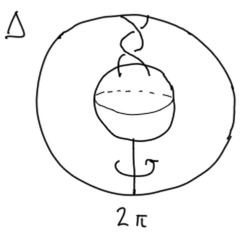
Dadas dos esferas concéntricas unidas por 3 cuerdas (una forma de ver $S^2 \times [0, 1]$), la trenza de Dirac consiste en un giro por 2π de dos de las cuerdas al cual llamaremos $\triangle$. El truco consiste en hacer otro giro de 2π y llegar a la identidad; en otras palabras $\triangle^2 = 1$.

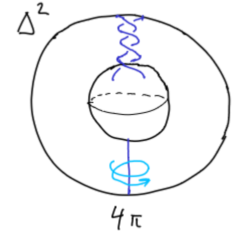
El objetivo es dar una prueba algebraica de este resultado utilizando diversos resultados de Teoría de Grupos y Topología Algebraica.

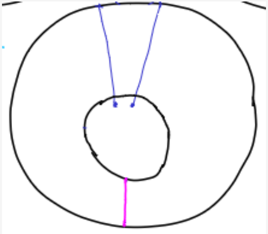
Introducción

El truco de las tijeras de Dirac

1. 

2. 

3. 

4. 

Preliminares

Algunas nociones sobre grupos

Definición

Sea E el conjunto de las palabras finitas (incluida la palabra vacía) que se pueden formar al concatenar los símbolos a^p y b^q, con $p, q \in \mathbb{Z}$. Dada una palabra, esta permitido efectuar las siguientes reducciones:

- reemplazar un grupo de dos símbolos consecutivos $a^p a^q$ por el símbolo a^{p+q};
- reemplazar un grupo de dos símbolos consecutivos $a^p a^q$ por el símbolo b^{p+q};
- suprimir a^0 y b^0.

Una palabra para la que toda reducción es imposible, es una palabra reducida. Esta formada por una sucesión de símbolos alternativamente de la forma a^p y b^q, con exponentes no nulos. Se verifica fácilmente que toda palabra admite una única reducción.

Preliminares

Algunas nociones sobre grupos

Grupo libre con dos generadores

Se denota por $L(a, b)$ $(Z * Z)$ al conjunto de las palabras reducidas dotado de la ley de composición siguiente: el producto $m_1 * m_2$ de dos palabras, es la palabra reducida asociada a la palabra (no necesariamente reducida) obtenida al escribir m_1 y m_2 consecutivamente.

Grupo libre de un conjunto

Es una generalización de la noción anterior: en vez de formar palabras con la ayuda de letras a y b, se utilizan todos los elementos del conjunto S. En particular, si S es un conjunto finito de n elementos, se obtiene el grupo libre de n generadores, que se denota $L(S)$.

Preliminares

Algunas nociones sobre grupos

Presentación de Grupos

Una presentación es una forma de definir un grupo mediante la especificación de dos conjuntos:

- S, conjunto de los generadores, de modo que todo elemento del grupo pueda expresarse como producto de elementos de S.
- R, conjunto de las relaciones, igualdades entre elementos del grupo.

La presentación de un grupo G suele escribirse en la forma $\langle S \mid R \rangle$. Si el segundo miembro de la igualdad es uno, suele omitirse.

Por ejemplo:

$$G = \langle a, b, c, d \mid b^9, cbcbcb, cbc^{-1}b^{-1} \rangle$$

indica que el grupo G está generado por a, b, c, d ; y el conjunto de relaciones nos indica que $b^9 = e$, $cb^3 = 1$, y que c y b conmutan.

Preliminares

Algunas nociones sobre grupos

Secuencia Exacta de Grupos

La secuencia de Grupos:

$$\dots \xrightarrow{\phi_{-1}} G_0 \xrightarrow{\phi_0} G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \xrightarrow{\phi_3} \dots \xrightarrow{\phi_{n-2}} G_{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} G_n \xrightarrow{\phi_{n+1}} \to$$

donde ϕ_i es homomorfismo se dice exacta si $Im(\phi_i) = Ker(\phi i + 1)\ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Secuencia Exacta Corta

Una secuencia exacta de grupos se dice que es exacta corta si:

$$1 \xrightarrow{\phi_0} G_1 \xrightarrow{\phi_1} G_2 \xrightarrow{\phi_2} G_3 \xrightarrow{\phi_3} 1$$

donde 1 representa el grupo trivial.

Preliminares

Algunas nociones sobre grupos

Acción de Grupos

Una acción (izquierda)de un grupo $(G, *)$ sobre un Espacio Topológico X es una aplicación $\phi : G \times X \to X$ que cumple:

- $\forall x \in X, \phi(e, x) = x$ donde e es el elemento neutro del grupo.
- $\forall x \in X$ y $\forall g, h \in G$ $\phi(g * h, x) = \phi(g, \phi(h, x))$.

Análogamente se define la acción derecha.

Órbitas

$\forall x \in X$, la órbita de x (G-órbita) se define como:

$$G_x = \{\phi(g, x) \mid g \in G\}.$$

Preliminares

Algunas nociones sobre grupos

Relación de equivalencia

Definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \Longleftrightarrow y \in G_x.$$

La partición inducida por $\sim$ consiste de órbitas

$$X \to X/\sim$$

$$x \to G_x.$$

Con la topología cociente $X/\sim$ es un espacio topológico y lo denotamos por X/G y lo llamamos el cociente de X por la acción de G.

Preliminares

Algunas nociones sobre Topología Algebraica

Homotopía

Dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ se dicen homotópicas si existe otra aplicación (continua también) $H : X \times [0, 1] \to Y$ tal que:

- $H(x, 0) = f(x)$,
- $H(x, 1) = g(x)$.

Tipos de Homotopía

Se dice que dos espacios X, Y tienen el mismo tipo homotópico, si existe un par de aplicaciones $X \xrightarrow{f} Y$ y $Y \xrightarrow{g} X$ tales que $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicos a Id_X Id_Y y respectivamente.

Preliminares

Algunas nociones sobre Topología Algebraica

Isootopía

Una Isotopía es una función continua:

$$K : X \times I \to Y \times I,$$

donde X, Y son espacios topológicos, y $\forall s \in I$ K es homeomorfismo

$$X \times \{s\} \cong Y \times \{s\}.$$

Preliminares

Algunas nociones sobre Topología Algebraica

Grupos de Homotopía

Sea X espacio topolócio S^n la n-esfera y $a \in S^n$ arbitrario. Definimos $\pi_n(X, x_0)$ como el conjunto de clases de Homotopía

$$F : S^n \to X$$

$$F(a) = x_0$$

π_n es grupo para $n \geq 1$.

Ejemplos

- $\pi_0(X, x_0)$ tiene tantos elementos como componentes conexas por caminos tenga X,
- $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo fundamental.

Preliminares

Algunas nociones sobre Topología Algebraica

Fibración

Una fibración consiste en una cuaterna (E, B, π, F), donde E, B, F son espacios topológicos y $\pi : E \longrightarrow B$ es una aplicación continua y sobreyectiva, de manera que para cualquier $x \in B$ existe una vecindad U de x en B, y un homeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tal que $\pi = \text{proj}_1 \circ \phi$, con $\text{proj}_1 : U \times F \longrightarrow U$, $\text{proj}_1(x, y) = x$.

Proposición

Si $f : E \to B$ es una firbación con fibra F, entonces tenemos una secuencia exacta de grupos

$$\cdots \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \ldots$$

$$\cdots \to \pi_1(B) \to \pi_0(F) \to \pi_0(E) \to \pi_0(B) \to 1$$

Preliminares

Espacios de Configuración

k-ésimo espacio de configuración ordenado

Dado un espacio topológico X, y $k \in \mathbb{Z}^+$, definimos

$$F_k(X) = F(X,k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \neq x_j, i \neq j\}$$

como el k-ésimo espacio de configuración.

k-ésimo espacio de configuración desordenado

Dado Σ_k el k-ésimo grupo simétrico, definimos

$$C_k = F_k/\Sigma_k,$$

el cociente de F_k por la acción de Σ_k, y lo llamamos el k-ésimo espacio de configuración desordenado.

Preliminares

Espacios de Configuración

Teorema (Fadell & Neuwirth):

Si M es una variedad sin frontera y $k \geq m \geq 1$, entonces

$$\pi_{k,m} : F_k(M) \to F_m(M)$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

la proyección a las primeras m coordenadas es una fibración, con fibra $F_{k-m}(M - Q_m)$ donde Q_m es un conjunto de m distintos puntos en M.

Corolario

Si $\mathbb{E}^2(\mathbb{C})$ es el espacio euclídeo, entonces $\pi_i(F_n(\mathbb{E}^2)) = 1$ (grupo trivial), siempre que $i \geq 2$.

Preliminares

Espacios de Configuración

Teorema

Si M es una variedad topológica, conexa y sin frontera tal que $M - Q_{k-1}$ es conexo para $k \geq 1$, entonces $F_k(M)$ es conexo por caminos.

Demostración

Procedamos por inducción sobre k. Por hipótesis se cumple para $k = 1$ pues M es conexo. Supongamos que se cumple para $k < n$, luego si $k = n$ por Teorema de Fadell & Neuwirth $\pi_{k,1} : F_k(M) \to F_1(M)$ es una fibración con fibra $F_{k-1}(M - Q_1)$, entonces tenemos una sucesión exacta

$$\pi_0(F_{k-1}(M - Q_1)) \to \pi_0(F_k(M)) \to \pi_0(F_1(M)) \to 1$$

donde por hipótesis de inducción $\pi_0(F_1(M)) = \pi_0(F_{k-1}(M - Q_1)) = \{1\}$; entonces $\pi_0(F_k(M))$ es trivial y $F_k(M)$ tiene una sola componente conexa.$\square$

Trenzas

Trenzas Geométricas

Trenzas como cuerdas en $\mathbb{E}^2 \times I$

Consideremos n puntos distintos en el plano euclidiano $\mathbb{E}^2(\mathbb{C})$, denotados por un vector $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ y consideremos la función

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t))$$

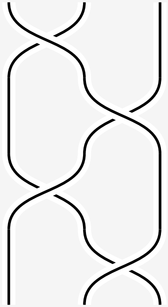
$$z_j : I \to \mathbb{E}^2$$

tales que $z_i(t) \neq z_j(t)$ siempre que $i \neq j$ y donde $\{z_1(0), z_2(0), \ldots, z_n(0)\} = \{z_1(1), z_2(1), \ldots, z_n(1)\}$ como conjunto. Dicho de otra forma $\exists!\ \sigma \in \Sigma_n$ tal que $z_j(0) = z_{\sigma(j)}(1)$.

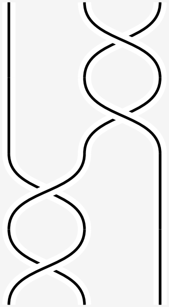
Trenzas

Trenzas Geométricas

Trenza



Trenza pura



Trenzas

Trenzas Geométricas

Equivalencia de trenzas

Sean $\beta, \beta' \subset \mathbb{E}^2 \times I$ trenzas geométricas con los mismos puntos base, entonces escribiremos $\beta \approx \beta'$ si existe una Isotopía $F_s : \mathbb{E}^2 \times I \to \mathbb{E}^2 \times I$ la cual es la identidad en $\mathbb{E}^2 \times \{0\}$ y $\mathbb{E}^2 \times \{1\}$ $\forall s \in I$. Donde $\forall s \in I$, la imagen β_s de β bajo F_s es una trenza geométrica y $\beta_0 = \beta$, $\beta_1 = \beta'$.

Una Isotopía es un homeomorfismo para cada $s \in [0, 1]$. Entonces F_s y F_s^{-1} son continuas, así dos puntos de una trenza no se pueden relacionar al mismo punto. Por lo tanto las cuerdas no se cruza y tampoco se permite regresar.

Trenzas

Trenzas Geométricas

$\approx$ es una relación de equivalencia

1. $\beta \approx \beta$, basta con tomar $F_s = id$,
2. $\beta \overset{Fs}{\approx} \beta' \iff \beta' \approx \beta$, basta con tomar $G_s = F_{1-s} \circ F_1$,
3. $\beta \overset{Fs}{\approx} \beta'$ y $\beta' \overset{Gs}{\approx} \beta'' \Rightarrow \beta \overset{Hs}{\approx} \beta''$ Basta con tomar

$$H_s = \begin{cases} F_{2s} & \text{si } 0 \leq v \leq 1/2 \\ G_{2s-1} \circ F_1 & \text{si } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

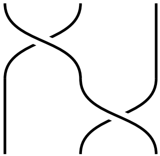
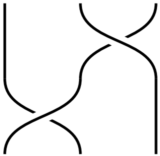
De ahora en adelante al hablar de una trenza estaremos hablando de todas sus clases de equivalencia.

Trenzas

Trenzas Geométricas

Composición de trenzas

Dos trenzas dadas con los mismos puntos base:

$\beta_1 =$  $\beta_2 =$ 

Se pueden componer de la siguiente manera:

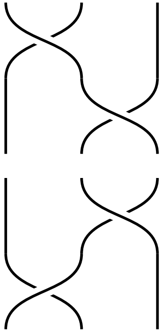
Trenzas

Trenzas Geométricas

Composición de trenzas

Poniendo una sobre la otra

$\beta_1 \circ \beta_2 =$



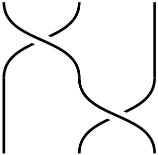
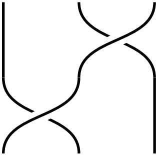
Donde la primera trenza recorre sus cuerdas en la primera mitad del tiempo y la segunda trenza recorre sus cuerdas en la segunda mitad del tiempo.

Trenzas

Trenzas Geométricas

Composición de trenzas

Podemos ver que esta composición por como esta definida es asociativa y cerrada, además, considerando el neutro como la trenza que tiene a la identidad en cada cuerda, cada trenza tiene su inverso:

$\beta_1 =$  $\beta_1^{-1} =$ 

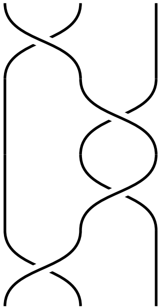
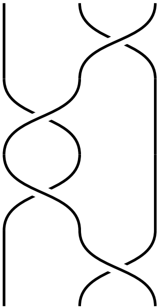
Definido geométricamente, reflejando la trenza tomando al plano como eje de simetría.

Trenzas

Trenzas Geométricas

Composición de trenzas

Al componer una trenza con su inverso obtenemos la trenza identidad

$\beta_1 \circ \beta_1^{-1} =$  $\beta_1^{-1} \circ \beta_1 =$ 

y podemos observar que es inverso tanto por la izquierda como por la derecha.

Trenzas

Trenzas Geométricas

Grupo de trenzas

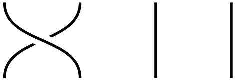
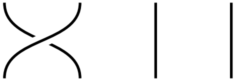
Como podemos ver, el grupo de clases de equivalencia bajo isotopía forman un grupo con la operación de composición de trenzas. A este grupo le denotaremos $B_n(\mathbb{E}^2, \vec{z})$, donde $\vec{z}$ es el vector en el que esta basado la trenza y por sencillez denotaremos B_n, también llamado el grupo de trenzas de Artin.
Denotaremos por P_n al grupo de trenzas puras. Podemos observar que $P_n \subset B_n$.

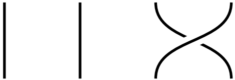
Trenzas

Trenzas Geométricas

Trenzas elementales

Viendo las trenzas de forma que quede un giro en cada nivel podemos deducir operadores elementales que generan cualquier trenza dada

$\sigma_1 =$  $\sigma_1^{-1} =$ 

$\sigma_3 =$  $\sigma_3^{-1} =$ 

Dado que podemos expresar toda trenza como producto de los σ_i y sus inversos, El grupo de trenzas esta generado por las trenzas elementales:

$$B_n = \langle \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$$

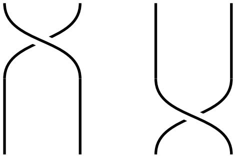
Trenzas

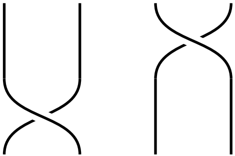
Trenzas Geométricas

Relación entre los generadores

Intuitivamente se puede ver que los generadores cumplen las siguientes relaciones:

$\sigma_1\sigma_3$ $=$ $\sigma_3\sigma_1$





$$1)\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$$

$$|i-j| > 1.$$

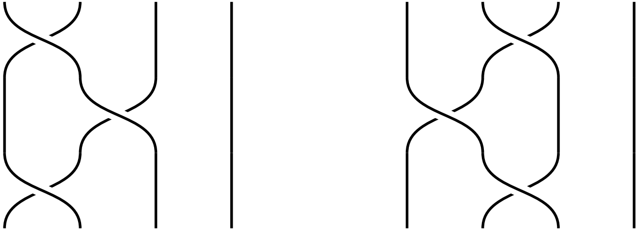
Trenzas

Trenzas Geométricas

Relación entre los generadores

Intuitivamente se puede ver que los generadores cumplen las siguientes relaciones:

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \quad = \quad \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$



$$2)\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$

$$i \in \{1, \ldots, n-2\}.$$

Trenzas

Trenzas Geométricas

Afirmación

$\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}\}$ junto con 1) y 2) dan una presentación para B_n.

Grupo de trenzas algebraico

Una definición equivalente al de trenza geométrica esta dada por el grupo fundamental de un espacio de configuración, así:

$$P_n(M) = \pi_1(F_n(M), \vec{z}) \; \vec{z} \in F_n(M)$$

y

$$B_n(M) = \pi_1(C_n(M), [\vec{z}]) \; [\vec{z}] \in C_n(M)$$

Teorema de la Presentación

Presentación para B_n

Teorema

Sea $\tilde{B}_n$ el grupo de trenzas abstracto, dado por la presentación de grupo:

$$\tilde{B}_n = \langle \tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \ldots, \tilde{\sigma}_{n-1} \mid \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i \, , \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \rangle .$$

Entonces $\tilde{B}_n \cong B_n = B_n(\mathbb{E}^2)$.

Demostración

Dada una trenza en B_n, tenemos una única permutación $\sigma \in \Sigma_n$. De esta forma podemos establecer una secuencia exacta corta del grupo de trenzas, dado que las trenzas puras no permutan a los puntos, asi:

$$1 \xrightarrow{a} P_n(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{\tau} B_n(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{\phi} \Sigma_n \xrightarrow{b} 1 .$$

Teorema de la Presentación

Presentación para B_n

Ahora hagamos lo mismo para $\tilde{B}_n$. Aquí tenemos un homomorfismo

$$\tilde{\phi} : \tilde{B}_n \to \Sigma_n$$

$$\tilde{\sigma}_i \to (i, i+1),$$

donde $(i, i+1)$ es la transposición i en Σ_n, las cuales lo generan. Por lo tanto el homomorfismo es sobreyectivo. De esta forma podemos definir la secuencia exacta corta

$$1 \xrightarrow{a} \tilde{P}_n(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{\tilde{\tau}} \tilde{B}_n(\mathbb{E}^2) \xrightarrow{\tilde{\phi}} \Sigma_n \xrightarrow{b} 1$$

donde $\tilde{P}_n = ker(\tilde{\phi})$ y $\tilde{\tau}$ es la inclusión.

Teorema de la Presentación

Presentación para B_n

Además tenemos un homomorfismo

$$l_n : \tilde{B}_n \to B_n$$

$$\tilde{\sigma}_i \to \sigma_i$$

por lo cual tenemos el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \tilde{P}_n \arrow[r] \arrow[d, "k_n"] & \tilde{B}_n \arrow[r] \arrow[d, "l_n"] & \Sigma_n \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 1 \arrow[d, "1"] \\
1 \arrow[r] & P_n \arrow[r] & B_n \arrow[r] & \Sigma_n \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Donde $k_n = l_n|_{\tilde{P}_n}$, el diagrama es conmutativo y por el lema de los 5 l_n es conmutativo si k_n es conmutativo.

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Encontremos una presentación para $\tilde{P}_n$

Consideremos los siguientes elementos:

$$\tilde{A}_{ij} = \tilde{\sigma}_{j-1}\tilde{\sigma}_{j-2}\dots\tilde{\sigma}_{i+1}\tilde{\sigma}_i^2\tilde{\sigma}_{i+1}^{-1}\dots\tilde{\sigma}_{j-2}^{-1}\tilde{\sigma}_{j-1}^{-1},$$

y consideramos el elemento

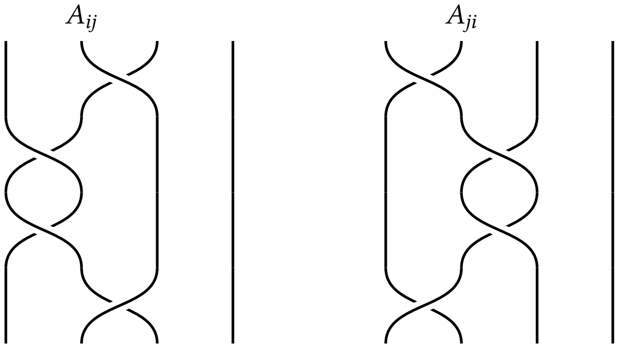
$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\tilde{\sigma}_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1},$$

en P_n el cual se ve de la siguiente forma

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Generadores de P_n



Los cuales generan a las trenzas geométricas puras

$$P_n = \langle A_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Generadores de $\tilde{P}_n$

Por otro lado, Hansen prueba usando reescritura de Reidemeister-Schrinder que

$$\tilde{P}_n = \langle \tilde{A}_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n \rangle,$$

y además cumple las relaciones

$$\tilde{A}_{rs}^{-1}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}_{rs} = \begin{cases} \tilde{A}_{rs} & \text{si } i < r < s < j \\ & \text{o } r < s < i < j, \\ \tilde{A}_{rj}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}_{rj}^{-1} & \text{si } i = r = s < j, \\ \tilde{A}_{rj}\tilde{A}_{sj}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}_{sj}^{-1}\tilde{A}_{rj}^{-1} & \text{si } 1 = r < s < j, \\ \tilde{A}_{rj}\tilde{A}_{sj}\tilde{A}_{rj}^{-1}\tilde{A}_{sj}^{-1}\tilde{A}_{ij}\tilde{A}_{sj}\tilde{A}_{rj}\tilde{A}_{sj}^{-1}\tilde{A}_{rj}^{-1} & r < i < s < j. \end{cases} \tag{2}$$

Estas relaciones nos dan una presentación para $\tilde{P}_n$.

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Generadores de $\tilde{P}_n$

Des esta forma tenemos el homomorfismo

$$k_n : \tilde{P}_n \to P_n$$

$$\tilde{A}_{ij} \to A_{ij}$$

Ahora probemos que es isomorfismo definiendo una secuencia exacta corta, al igual que en lo hicimos para B_n.

El grupo $\tilde{P}_{n-1}$ es subgrupo de $\tilde{P}_n$ y esta generado por $\langle \tilde{A}_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n-1 \rangle$.

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Definimos un homomorfismo

$$\eta(\tilde{A}_{ij}) = \begin{cases} \tilde{A}_{ij} & \text{si } 1 \leq i < r < j < n, \\ 1 & \text{si } j = n. \end{cases} \tag{3}$$

Notemos que $ker(\eta) = \tilde{U} = \langle \tilde{A}_{in} \mid 1 \leq i < n \rangle$ y obtenemos una secuencia exacta de grupos

$$1 \longrightarrow \tilde{U}_n \longrightarrow \tilde{P}_n \xrightarrow{\eta} \tilde{P}_{n-1} \longrightarrow 1.$$

Ahora necesitamos una secuencia exacta para P_n.

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Consideramos la fibración

$$\pi_{n,1} : F_n(\mathbb{E}^2) \to F_{n-1}(\mathbb{E}^2).$$

La fibra

$$\mathbb{E}^2 - Q_{n-1}$$

consiste de coordenadas z_n, con $z_n \neq z_k$, $k < n$,

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{E}^2 - Q_{n-1}) \longrightarrow \pi_1(F_n(\mathbb{E}^2)) \longrightarrow \pi_1(F_{n-1}(\mathbb{E}^2)) \longrightarrow 1.$$

Esto lo obtenemos del teorema de Faddel-Neuwirth y del hecho de que el plano es conexo.

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Esta secuencia también la podemos ver como:

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{E}^2 - Q_{n-1}) \longrightarrow P_n(\mathbb{E}^2) \longrightarrow P_{n-1}(\mathbb{E}^2) \longrightarrow 1.$$

$\mathbb{E}^2 - Q_{n-1}$ es el plano menos $n-1$ puntos, por lo que es del tipo de homotopía de una suma wedge de $n-1$ circunferencias; entonces $\pi_1(\mathbb{E}^2 - Q_{n-1}) = G_{n-1}$ el grupo libre con $n-1$ generadores. Obtenemos de esta forma el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & \tilde{U} \arrow[r] \arrow[d, "h_n"] & \tilde{P}_n \arrow[r] \arrow[d, "k_n"] & \tilde{P}_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "k_{n-1}"] & 1 \arrow[d, "1"] \\
1 \arrow[r] & \pi_1(\mathbb{E}^2 - Q_{n-1}) \arrow[r] & p_n \arrow[r] & P_{n-1} \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

Teorema de la Presentación

Presentación para P_n

Donde $h_n|_{\tilde{U}}$ y $h_n(\tilde{A}_{ij})$ es un lazo basado en $z_n$que rodea a la j-ésima perforación. Entonces $h_n(\tilde{A}_{ij})$ es un generador de $\pi_1(\mathbb{E}^2 - Q_{n-1})$ y entonces $\tilde{U}$ es también libre, pues cualquier relación de los generadores se cumpliría también en la imagen. Por lo tanto h_n es isomorfismo para todo n. Mediante un razonamiento inductivo, dado que $\tilde{P}_1 = 1 = P_1$, k_1 es isomorfismo y por el lema de los 5 esto implica k_2 isomorfismo. Repitiendo el proceso obtenemos k_n es isomorfismo y por lo tanto

$$\tilde{P}_n \cong P_n,$$

$$\tilde{B}_n \cong B_n.$$

Trenzas de S^2

Presentación para S^2

Si basamos nuestras trenzas en puntos de la esfera la presentación, cambia ligeramente, siendo los mismos generadores pero con una relación extra

$$B_n(S^2) = \langle s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \mid s_i s_j = s_j s_i \,, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},$$

$$s_1 s_2 \ldots s_{n-2} s_{n-1}^2 s_{n-2} \ldots s_2 s_1 \rangle.$$

Demostrado por Fadell-Van Burskirk (1962)

Trenzas de S^2

Truco de las tijeras de Dirac

Afirmación:

Sea $B_3(S^2)$, $\triangle^m = 1$, para m para y no trivial para m impar.

Demostración

Las relaciones en $B_3(S^2)$ son

1. $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$,
2. $s_1 s_2^2 s_1 = 1$.

Vemos a $\triangle = s_2^2$, si $\triangle = 1$ entonces obtenemos una nueva relación independiente de las otras dos. Después de 2) obtenemos $s_2^2 = s_1^{-2} y\ s_1^2 = s_2^{-2}$ y de 2) obtenemos $(s_1 s_2)^3 = s_1^2 = s_2^2$ operando s_1 por la derecha en 1) y después s_2 por la izquierda 1). Entonces $s_1^2 = s_2^2 = s_2^{-2}$, $s_2^4 = \triangle^2 = 1$.

$$\therefore \triangle^{2m} = 1 \text{ y } \triangle^{2m+1} \neq 1\ m \in \mathbb{Z}.$$

Bibliography

- JEAN-LUC THIFFEAULT . *Lectures on Braids and Dynamics* . University of Wisconsin – Madison.
- FRED COHEN AND JONATHAN PAKIANATHAN . *CONFIGURATION SPACES AND BRAID GROUPS* .
- BIRMAN. *Braids-links.*1967.